MÉMOIRE

SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

DU PREMIER ORDRE,

PAR

M. Paul PAINLEVÉ,
CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

A Monsieur

Hommage

Paul Painlevé

MÉMOIRE

SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE,

PAR M. PAUL PAINLEVÉ (1),

CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

INTRODUCTION.

Les théorèmes bien connus de MM. Briot et Bouquet permettent d'étudier, dans le voisinage d'un point x_0, les intégrales d'une équation différentielle du premier ordre

$$y' = f(x, y),$$

qui deviennent égales à y_0 pour $x = x_0$. Si $f(x, y)$ est holomorphe dans le voisinage de x_0, y_0, il existe une seule intégrale satisfaisant à la condition $y(x_0) = y_0$, et on sait la développer en série de Taylor. Quand les valeurs (x_0, y_0) forment un couple de valeurs singulières de $f(x, y)$, on sait encore discuter, dans le voisinage de x_0, la forme des intégrales, qui peuvent être alors en nombre infini. MM. E. Picard et H. Poincaré ont même indiqué des développements en séries de ces intégrales dans le voisinage de x_0.

(1) Mémoire couronné par l'Académie des Sciences (grand prix des Sciences mathématiques, 1890).

Mais qu'arrive-t-il lorsqu'on fait varier x d'une façon quelconque dans le plan des x et qu'on suit les variations correspondantes d'une intégrale particulière y? La fonction y est-elle indéterminée en certains points x_0? acquiert-elle un nombre limité ou illimité de valeurs? C'est là une question à laquelle ne répondent pas les théorèmes que nous venons de rappeler.

Dans le cas particulier où x ne figure pas explicitement dans l'équation

$$F(y, y') = 0,$$

supposée algébrique en y, y', MM. Briot et Bouquet ont résolu le problème suivant :

Reconnaître si l'intégrale générale de l'équation est une fonction de x qui n'admet dans le plan qu'un nombre donné n de déterminations.

Ce problème, devenu classique, a été le point de départ d'un très grand nombre de travaux.

Mais, quand x figure explicitement dans l'équation

$$F[y, y', (x)] = 0, \tag{1}$$

algébrique en y, y', la question analogue apparaît comme beaucoup plus compliquée, et elle était demeurée intacte jusque dans ces dernières années.

C'est M. Fuchs [1] qui, le premier, a cherché les conditions pour que l'intégrale d'une équation (1) soit uniforme. Il s'est même placé à un point de vue plus général que je vais indiquer.

Quand on considère les intégrales d'une équation différentielle d'ordre quelconque, parmi les points critiques x_i de ces intégrales (j'entends les points où plusieurs valeurs de y se permutent), il en est qui varient avec les constantes d'intégration et que j'appelle *points critiques mobiles*; d'autres, au contraire, qui restent *fixes*. Ces deux espèces de points jouent un rôle très différent, comme la suite de ce Mémoire le montrera.

M. Fuchs a indiqué les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale de (1) n'ait que des points critiques fixes x_i. Ces con-

---

[1] FUCHS, *Sitzungsberichte der Academie der Wissenschaften zu Berlin*, juin 1884.

ditions une fois remplies, si l'on veut que l'intégrale générale soit uniforme, il reste à exprimer que ces points x_i, qui sont connus, ne sont pas des points critiques des intégrales.

M. H. Poincaré [1], reprenant la question, est arrivé à ces conclusions inattendues :

Quand les points critiques de l'équation (1) *sont fixes, cette équation s'intègre algébriquement, ou par une quadrature, ou se ramène à une équation de Riccati.*

Les trois cas se distinguent de la manière suivante. Donnons à x une valeur quelconque dans l'équation (1). Cette équation, algébrique et irréductible en y, y',

$$F[y, y', (x)] = 0,$$

a un certain genre p qui ne varie pas avec x. C'est ce nombre p que nous appelons, par définition, *genre de l'équation différentielle.* Si p est plus grand que 1, les équations de M. Fuchs s'intègrent algébriquement; si $p = 1$, elles s'intègrent par quadrature; si p est nul, elles se ramènent à une équation de Riccati.

La raison de ce fait est qu'il existe alors, entre les valeurs (y, y') et (y_0, y'_0) de l'intégrale et de sa dérivée aux points x et x_0, une correspondance birationnelle qui transforme l'une dans l'autre des deux courbes algébriques

$$F[y, y', (x)] = 0, \qquad F[y_0, y'_0, (x)] = 0.$$

Plus récemment, M. Picard [2] s'est servi d'un théorème analogue pour intégrer des classes très étendues d'équations d'ordre supérieur.

Je me propose de généraliser dans ce travail, à la fois la question résolue par M. Poincaré et la méthode qui l'a conduit à cette solution.

Joignons dans le plan des x par des coupures L tous les points critiques fixes x_i des intégrales de (1), en choisissant ces coupures de

(1) H. POINCARÉ, *Sur un théorème de M. Fuchs* (*Acta mathematica*, t. VII).

(2) E. PICARD, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Mathématiques*, 1889).

telle façon que le point x, assujetti à ne pas les franchir, puisse atteindre un point quelconque du plan, mais ne décrive jamais un contour fermé autour d'un ou plusieurs points x_i.

Soit alors y_0 la valeur en x_0 d'une intégrale particulière $y(x)$; faisons varier x (sans franchir les coupures L) et suivons les variations correspondantes de y, en partant de x_0 avec la valeur y_0 de y.

Il peut arriver, dans ces conditions, que y acquière un nombre limité ou illimité de valeurs en un même point x. Si c'est le premier cas qui se trouve réalisé (quel que soit y_0), nous convenons de dire que *l'intégrale générale de* (1) *ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles.*

Deux problèmes se posent maintenant d'eux-mêmes :

1° *Étudier les propriétés de l'intégrale de* (1) *quand elle est supposée de cette nature;*

2° *Reconnaître si l'intégrale d'une équation donnée* (1) *ne prend qu'un nombre limité de valeurs autour des points critiques mobiles.*

Ce sont ces deux problèmes dont nous nous occupons ici. Il est indispensable, pour les traiter, de s'appuyer sur certaines propriétés caractéristiques des équations du premier ordre, qui demandent à être démontrées rigoureusement. Ces propriétés se résument ainsi :

I. *Une intégrale $y(x)$ d'une équation* (1) *ne saurait devenir indéterminée qu'en certains points particuliers ξ_i du plan des x, faciles à déterminer sur l'équation différentielle.*

II. *Ces points ξ_i mis à part, une intégrale qui ne prend dans le voisinage de la ligne λ (d'un côté de cette ligne) que n valeurs ne peut admettre cette ligne λ pour ligne singulière.*

III. *Quand l'intégrale générale d'une équation* (1) *ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, il existe entre $y(x)$ et $y_0(x_0)$ une relation algébrique*

$$\Phi[y, y_0, (x), (x_0)] = 0.$$

Cette relation est de degré mn par rapport à y et à y_0 respectivement, si m désigne le degré en y' de l'équation (1).

Ces propositions restent vraies quand on admet seulement que y' est une fonction analytique de y à m déterminations, $y' = f(x, y)$, qui, pour toute valeur de x, n'admet pas dans le plan des y de ligne singulière. La proposition III nous montre alors que, si l'intégrale de l'équation est de l'espèce étudiée, y' est nécessairement une fonction algébrique de y. Nous nous bornerons donc à considérer dans ce Mémoire des équations de la forme

$$F[y, y', (x)] = 0,$$

algébriques et irréductibles en y, y', dont les coefficients dépendent de x d'une façon quelconque.

Le théorème III, qui est fondamental, est évident quand on suppose que l'intégrale y est une fonction algébrique de x; si, en effet, l'intégrale de (1) se laisse définir par une relation algébrique

$$G(y, x) = 0,$$

d'un certain degré en y et x, en exprimant qu'il en est ainsi, on forme un certain nombre de relations algébriques entre les coefficients de G. Ces coefficients dépendent donc algébriquement d'un d'entre eux, par suite de y_0. Cette remarque s'applique aussi bien aux équations différentielles d'ordre supérieur.

Mais, ce cas particulier excepté, les propriétés que nous venons d'énumérer exigent une démonstration, en dépit de leur apparente évidence qui les a fait parfois étendre aux équations d'ordre supérieur pour lesquelles elles ne subsistent à aucun titre. L'intégrale générale des équations du second ordre ou du troisième ordre les plus simples, quand elle est uniforme ou à n valeurs, peut présenter des points singuliers essentiels ou des lignes singulières, variables avec la constante d'intégration, et qu'aucune particularité de l'équation différentielle ne met en évidence. Cette intégrale n'est pas nécessairement une fonction algébrique des constantes y_0, y'_0, y''_0, ...; ces constantes y peuvent figurer d'une façon transcendante [1].

Une fois admises pour les équations du premier ordre

$$F[y', y, (x)] = 0 \tag{1}$$

[1] Voir à ce sujet le Mémoire déjà cité de M. E. Picard.

ces propositions générales, il est aisé de donner à l'intégrale de (1) plusieurs formes intéressantes. Tout d'abord, on peut l'écrire

$$(2)\qquad y^n + R_{n-1}[y_0, y'_0, (x_0), (x)]y^{n-1} + \ldots + R_0[y_0, y'_0, (x_0), (x)] = 0,$$

les R désignant des fonctions rationnelles de y_0, y'_0, qui dépendent de x d'une façon quelconque. Il est clair qu'on a aussi

$$(3)\qquad y_0^n + R_{n-1}[y, y', (x), (x_0)]y_0^{n-1} + \ldots + R_0[y, y', (x), (x_0)] = 0,$$

et ceci nous montre que l'intégrale de (1) se laisse définir par l'équation

$$R_i[y, y', (x), (x_0)] = R_i[y_0, y'_0, (x_0), (x_0)] = C_i,$$

c'est-à-dire par une équation telle que

$$(4)\qquad \rho[y, y', (x)] = \text{const.} = \gamma,$$

ρ désignant une fonction rationnelle de y, y', et y' la fonction de (y, x) que détermine l'équation (1).

Plus généralement, l'intégrale vérifie une infinité de relations de la forme

$$(5)\qquad R[y, y', (x)] = A(x, C),$$

où A est une fonction de x dont les points critiques sont indépendants de la constante C. Nous donnons aux constantes γ le nom de *constantes intégrales*, aux fonctions A le nom de *fonctions intégrales*. Deux constantes intégrales γ, γ_1 sont liées par une relation algébrique

$$g(\gamma, \gamma_1) = 0.$$

Deux fonctions intégrales A, A_1 sont liées par une relation

$$H[A, A_1, (x)] = 0,$$

algébrique en A, A_1. Nous montrons qu'on peut toujours choisir deux fonctions (ou, si l'on veut, deux constantes) intégrales

$$r = a, \qquad r_1 = a_1,$$

liées par l'équation

$$h[r, r_1, (x)] = 0,$$

de telle façon que toute autre fonction intégrale $R = A$ s'exprime rationnellement à l'aide de r, r_1,

$$R = \varphi[r, r_1, (x)], \qquad A = \varphi[a, a_1, (x)].$$

Cette relation $h = 0$, dont les modules sont indépendants de x, n'est déterminée qu'à une transformation birationnelle près; nous l'appelons *relation entre les fonctions (ou constantes) intégrales*.

Par exemple, il suffit de prendre pour r et r_1 les deux constantes intégrales

$$\rho = \lambda_0(x_0)\,R_0[y, y', (x), (x_0)] + \ldots + \lambda_{n-1}(x_0)\,R_{n-1}[y, y', (x), (x_0)]$$

et

$$\frac{d\rho}{dx_0} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda_i(x_0)\frac{dR_i}{dx_0}[y, y', (x), (x_0)] + \frac{d\lambda_i(x_0)}{dx_0}R_i[y, y', (x), (x_0)],$$

liées par la relation

$$h\left[\rho, \frac{d\rho}{dx_0}, (x_0)\right] = 0,$$

où x_0 est une constante quelconque, soit zéro.

On peut aussi bien prendre pour r et r_1 les deux fonctions intégrales

$$r[y, y', (x)] = r^0(x, C), \qquad r'[y, y', (x)] = r'^0(x, C),$$

définies par les égalités

$$r^0 = \sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda_i(x) \quad R_i[y_0, y'_0, (x_0), (x)], \qquad r = r^0[y, y', (x), (x)],$$

$$r'^0 = \frac{dr^0}{dx} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda_i(x)\frac{dR_i}{dx}[y_0, y'_0, (x_0), (x)] + \frac{d\lambda_i}{dx}R_i[y_0, y'_0, (x_0), (x)],$$

$$r' = r'_0[y, y', (x), (x)];$$

la fonction $r^0(x)$, ou la fonction r (quand on y remplace y par une intégrale de (1), vérifie l'équation

$$h\left[r^0, \frac{dr^0}{dx}, (x)\right] = 0 \qquad \text{ou} \qquad h\left[r, \frac{dr}{dx}, (x)\right] = 0,$$

équation différentielle en r dont les points critiques sont fixes. (Dans ces égalités, les λ_i sont des fonctions de x_0 ou de x qu'on laisse quelconques.)

De ce qui précède résulte encore ce théorème que l'intégrale de l'équation (1) vérifie une relation

$$G[y, \gamma, (x)] = 0 \tag{6}$$

de degré m en γ : dans cette égalité, γ désigne une constante ou, si l'on veut, une fonction de x et d'une constante dont les points critiques sont fixes dans le plan des x.

Quand le genre ϖ de la relation $h = 0$ est nul, les fonctions et constantes intégrales s'expriment rationnellement à l'aide d'une d'entre elles; il existe alors des relations

$$G[y, \gamma, (x)] = 0, \tag{6}$$

de degré m en γ, et de degré n en y; γ est une constante, ou, si l'on veut, une fonction de x qui satisfait à une équation de Riccati arbitraire

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

Autrement dit, l'intégrale y peut s'écrire

$$y^n + R_{(n-1)}[C, (x)]y^{n-1} + \ldots + R_0[C, (x)] = 0, \tag{7}$$

C désignant une constante, et les R_i des fractions rationnelles en C de degré m.

Quand $\varpi = 1$, l'intégrale est de la forme

$$\left\{\begin{aligned} & y^n + r_{n-1}[C, (x)]y^{n-1} + \ldots + r_0[C, (x)] \\ & \quad + \sqrt{(1 - C^2)(1 - k^2C^2)}\,\{\rho_{n-1}[C, (x)]y^{n-1} + \ldots + \rho_0[C, (x)]\} = 0 \end{aligned}\right. \tag{8}$$

(k désignant un certain nombre), et il existe des relations

$$G[y, \gamma, (x)] = 0,$$

de degré m en γ, de degré $2n$ en y, où γ représente une fonction de x qui vérifie la relation

$$\frac{d\gamma}{dx} = N(x)\sqrt{(1 - \gamma^2)(1 - k^2\gamma^2)};$$

dans cette dernière égalité, $N(x)$ peut être choisi arbitrairement. Si l'on fait $N = 0$, $\gamma = C$.

Ces théorèmes sont connus depuis longtemps dans bien des cas particuliers. M. Fuchs, par exemple, a montré par une autre méthode que l'intégrale de (1), *quand elle est algébrique*, peut se mettre sous la forme

$$\rho[y, y', (x)] = \gamma.$$

De même, quand la variable x ne figure pas explicitement dans (1), la forme de l'intégrale

$$\begin{aligned} &y^n + R_{(n-1)}[y_0, y'_0, (x)]\, y^{n-1} + \ldots + R_0[y_0, y'_0, (x)] = 0 \\ &\quad \equiv y^n + R_{n-1}(x + C)\, y^{n+1} + \ldots + R_0(x + C) \end{aligned}$$

correspond au théorème d'addition des fonctions simplement ou doublement périodiques.

Quand l'équation a ses points critiques fixes, l'équation (2) se réduit à

$$y = R[y_0, y'_0, (x_0), (x)],$$

et la relation $h = 0$, où l'on fait $r = R$, $r' = \frac{dR}{dx}$, à l'équation (1). On retrouve ainsi le résultat qui est le point de départ de la méthode de M. Poincaré, à savoir que les équations

$$y' = \frac{dR}{dx}[y_0, y'_0, (x_0), (x)], \qquad y = R[y_0\, y'_0, (x_0), (x)]$$

définissent une correspondance birationnelle entre les deux courbes

$$F[y, y', (x)] = 0, \qquad F[y_0, y'_0, (x_0)] = 0.$$

Dans le cas le plus général, les égalités

$$\gamma = \rho[y, y', (x)], \qquad \gamma_1 = \rho_1[y, y', (x)]$$

définissent une correspondance rationnelle entre la courbe

$$F[y, y', (x)] = 0$$

et la courbe

$$h(\gamma, \gamma_1) = 0,$$

que représente la relation entre les constantes intégrales.

Remarquons de même que, si $\varpi = 0$, il existe une correspondance birationnelle entre la courbe

$$(1) \qquad F[y, y', (x)] = 0$$

et les courbes

$$(6) \qquad G[y, \gamma, (x)] = 0,$$

correspondance que définissent les égalités

$$\gamma = \rho[y, y', (x)],$$
$$y' = -\frac{1}{\frac{\partial G}{\partial y}}\left[\frac{\partial G}{\partial \gamma}\gamma' + \frac{\partial G}{\partial x}\right],$$

avec la relation

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

Dans tous les autres cas, il existe entre (1) et (6) une correspondance rationnelle, qui est seulement birationnelle quand γ est une constante.

On voit comment les transformations rationnelles des courbes algébriques s'introduisent d'elles-mêmes dans l'étude qui nous occupe. Leurs propriétés doivent jouer dans ce qui va suivre un rôle essentiel, et c'est au développement de ces propriétés qu'est consacré le second Chapitre de ce Mémoire.

Les résultats que nous obtenons peuvent se résumer ainsi :

Soient

$$(\alpha) \qquad f(y, z) = 0,$$
$$(\beta) \qquad F(y_1, z_1) = 0$$

les équations de deux courbes de degré m et m_1 respectivement, et

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} y = \varphi(y_1, z_1), \\ z = \psi(y_1, z_1) \end{cases}$$

deux fonctions rationnelles de (y_1, z_1) qui permettent de passer de (α) à (β).

Si le genre p de (α) est nul, on peut toujours passer de (α) à (β) par une infinité de substitutions (γ) qui dépendent d'une fonction rationnelle arbitraire du point analytique (y_1, z_1) de (β).

Quand $p = 1$, on ne peut en général passer rationnellement de (α) à (β). Pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'une intégrale abélienne de première espèce de la courbe (β) se ramène aux intégrales elliptiques de module égal au module de (α). Une telle transformation, quand elle existe, dépend toujours d'une constante et au moins d'un entier arbitraires, mais ne dépend jamais d'un second paramètre continu.

Quand p est plus grand que 1, *il n'existe qu'un nombre fini de substitutions* (γ) *transformant* (α) *en* (β), *et toutes ces substitutions se calculent algébriquement.*

Ces théorèmes se laissent démontrer par des procédés analogues à ceux qu'emploient MM. E. Picard et H. Poincaré dans l'étude des transformations birationnelles des courbes et des surfaces. Le point fondamental de ces raisonnements, c'est que la transformation (γ) fait correspondre aux *courbes adjointes* de degré $(m-3)$ de (α) certaines des courbes adjointes de degré (m_1-3) de (β).

Il résulte de ce simple fait que le genre p de (α) est au plus égal au genre p_1 de (β). Quand la substitution (γ) est birationnelle, on sait que $p=p_1$; nous montrons que la *réciproque est vraie quand p est plus grand que* 1. Ce théorème a déjà été établi par H. Weber à l'aide d'autres considérations (1).

Plus généralement, si μ désigne l'*ordre* de la transformation, c'est-à-dire le nombre des points de (β) qui correspondent à un point de (α), on a

$$\mu = \frac{p_1 - 1}{p - 1}.$$

Enfin, si la courbe (β) est d'espèce hyperelliptique, il en est de même de la courbe (α).

Ces propositions supposent les deux courbes (α) et (β) données. Mais la question qui nous intéresse surtout consiste à *déterminer toutes les courbes* (α) *distinctes qui correspondent rationnellement à une courbe* (β) *donnée.* J'entends par courbes *distinctes* deux courbes qui n'ont pas les mêmes *modules*, et par suite ne se correspondent pas birationnellement. En nous servant de l'équation de degré $(p+1)$ à laquelle Clebsch ramène toute courbe de genre p, nous montrons qu'*on peut calculer algébriquement un type de toutes les classes de courbes* (*de genre* $p>1$) *qui se transforment rationnellement, d'après les formules* (γ), *en la courbe* (β) *donnée. Ces types* (*ou ces classes*) *sont en nombre limité.* Les courbes (α), qui correspondent à la courbe (β) donnée, ne sauraient dépendre de modules arbitraires.

(1) H. Weber, *Zur Transformation der algebraischen Functionen* (*Journal de Crelle*, t. 76).

La question de *reconnaître si la courbe* (β) *est la transformée rationnelle d'une courbe de genre* 1 revient à déterminer *si une intégrale abélienne de première espèce attachée à la courbe* (β) *n'a que deux périodes.*

L'application de ces théorèmes à l'étude des équations différentielles est immédiate. Soit

$$F[y, y', (x)] = 0 \tag{1}$$

une équation dont l'intégrale prend n valeurs autour des points critiques mobiles.

Il existe alors, avons-nous dit, une correspondance rationnelle entre la courbe (1) et une certaine courbe

$$H(c, c_1) = 0$$

que définit la relation entre les constantes intégrales, et cette correspondance

$$\begin{aligned} c &= R\,[y, y', (x)],\\ c_1 &= R_1[y, y', (x)] \end{aligned}$$

détermine l'intégrale générale de (1).

Nous sommes en état de décider s'il existe une telle courbe H *de genre* ϖ *supérieur à* 1. De là ce théorème :

On sait reconnaître algébriquement si l'intégrale de l'équation (1) *donnée ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, la valeur correspondante de* ϖ *étant supposée plus grande que* 1. *S'il en est ainsi, l'intégrale s'obtient elle-même algébriquement.*

On doit avoir, dans ce cas,

$$n = \frac{p-1}{\varpi - 1},$$

si p est le genre de l'équation (1). Ceci nous montre que, pour une équation (1) de degré donné en y et y', le nombre n ne peut dépasser une certaine limite quand ϖ est supérieur à 1.

Traitons maintenant la même question en supposant $\varpi = 1$.

Il existe alors une intégrale abélienne de première espèce de la courbe (1)

$$J[y, y', (x)] = \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i(x) \int \frac{P_i[y, y', (x')]}{F'_{y'}}\,dy,$$

qui satisfait, si $y(x)$ est une intégrale quelconque de (1), à l'égalité

$$J[y, y', (x)] = h(x) + C$$

(C est une constante), ou encore à l'égalité

$$\frac{dJ}{dx} = k(x).$$

Si l'on exprime que cette dernière relation est équivalente à l'équation (1), on forme un certain nombre de relations linéaires et homogènes par rapport aux λ_i, $\frac{d\lambda_i}{dx}$. Quand ces relations sont compatibles, tous les λ_i sont donnés le plus souvent par une quadrature logarithmique. Il peut arriver toutefois que leur détermination dépende d'*une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre $p - 1$ au plus. Les λ_i une fois calculés, l'équation s'intègre par une quadrature*

$$J = \int k(x)\, dx + C.$$

Un cas important, où les λ_i se déterminent algébriquement, est celui où les modules de l'équation (1) ne dépendent pas de x.

Ajoutons que, les conditions précédentes se trouvant réalisées, l'intégrale de (1) n'est pas nécessairement de la forme voulue. Il faut, de plus, que l'une des intégrales J ainsi trouvées n'ait que deux périodes. Quand $\varpi = 1$, le nombre n peut dépasser toute limite, pour un degré donné de l'équation (1) en y, y'.

Le nombre ϖ ne saurait être supérieur à p. Il convient de remarquer que, *si $p = \varpi$ $(p > 1)$, l'intégrale a ses points critiques fixes*, car la correspondance entre F et H est birationnelle. *Ce théorème subsiste pour $p = 1$.*

Seul le cas où ϖ est nul échappe complètement à la méthode. Elle ne saurait donc rien nous apprendre sur les équations (1) résolues par rapport à y' ou de genre 0. Mais, *quel que soit le nombre ϖ*, nous pouvons résoudre la question suivante :

Déterminer si l'intégrale générale de l'équation (1) est une fonction qui ne prend dans le plan des x qu'un nombre donné n de valeurs autour des points critiques mobiles.

Nous montrons d'abord qu'on sait trouver une limite supérieure N du degré auquel figure y_0 dans la fonction

$$r = a_0(x)\,\mathrm{R}_0[y_0, y'_0, (x_0), x] \\ + a_1(x)\,\mathrm{R}_1[y_0, y'_0, (x_0), (x)] + \ldots + a_{n-1}(x)\,\mathrm{R}_{(n-1)}[y_0, y'_0, (x_0), (x)],$$

supposée entière et de degré $(m-1)$ en y'_0. Pour cela, nous identifions le premier membre de l'équation

$$\Phi[y, y_0, (x)] = 0$$

de degré mn en y et en y_0 respectivement avec le produit

$$\chi(z_1)\chi(z_2)\ldots\chi(z_m),$$

en posant

$$\chi(z_j) = \sum_{i=1}^{i=n} y^i\,\mathrm{R}_i[y_0, z_j, (x)];$$

z_j désigne l'une des m valeurs de y'_0 pour y_0, x_0. Une fois N calculé, on connaît une limite supérieure du degré en R_i, r, $\frac{dr}{dx}$ des relations

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} \psi_i[\mathrm{R}_i, r, (x)] = 0, \\ h\left[r, \dfrac{dr}{dx}, (x)\right] = 0. \end{cases}$$

Exprimons que les fonctions R_i, r, déterminées par les équations (A), n'ont que des points critiques fixes et définissent l'intégrale de (1) quand on les porte dans l'équation

$$\chi(z) = 0.$$

Le système de conditions ainsi formé, entre les coefficients des h, ψ_i, est ou *incompatible ou déterminée;* car si n est le nombre des valeurs de y qui se permutent effectivement autour des points critiques mobiles, il ne saurait exister deux systèmes distincts de relations (A).

Une fois les relations A calculées (par des opérations purement algébriques), l'intégration de (1) est ramenée à celle de

$$h[r, r', (x)] = 0.$$

Quant aux R_i, ils s'expriment rationnellement à l'aide de r et de r'. Si nous appliquons à l'équation $h = 0$, dont les points critiques sont fixes, les résultats obtenus par M. Poincaré, nous voyons que *l'équation donnée s'intègre algébriquement quand* ϖ *est supérieur à* 1; *elle s'intègre par une quadrature si* $\varpi = 1$; *enfin elle se ramène à une équation de Riccati, si* $\varpi = 0$.

La méthode précédente fournit une démonstration directe du théorème que nous avions en vue. Mais les calculs auxquels elle donne lieu sont en général impraticables. La marche à suivre la plus commode consiste à distinguer les trois cas

$$\varpi > 1, \qquad \varpi = 1, \qquad \varpi = 0.$$

Le premier se traite aisément à l'aide de la théorie des transformations rationnelles.

Le second nous conduit à chercher si une intégrale abélienne de première espèce de (1), J, ne se ramène pas aux intégrales elliptiques par une transformation d'ordre n : problème classique qu'on sait traiter de bien des façons. Une fois J calculé, l'intégration s'achève par une quadrature.

Pour le troisième cas enfin ($\varpi = 0$), on se sert de la forme (6) de l'intégrale

$$G[y, \gamma, (x)] = 0, \tag{6}$$

où G est de degré m en γ, de degré n en y, et où γ vérifie l'équation

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P. \tag{6'}$$

On assujettit les coefficients de (6) à trois relations choisies, de façon qu'une seule équation (6) corresponde à l'équation (1). Il suffit alors d'exprimer que les équations (6) et (6′) définissent l'intégrale de l'équation donnée, pour former un système de conditions qui est ou incompatible ou déterminé. S'il est déterminé, l'équation (1) se trouve ramenée par des opérations purement algébriques à une équation de Riccati.

Quand le genre p de (1) n'est pas nul, on peut abréger les calculs en tenant compte de ce fait que les courbes (6) et (1) se correspondent birationnellement. Quand $p = 0$, on ramène l'équation (1) à la forme

$$y' = R[y, (x)] = \frac{P[y, (x)]}{Q[y, (x)]}, \tag{1'}$$

qui est la plus commode pour nos recherches. Il s'agit alors de reconnaître si l'équation (1′) se laisse déduire d'une équation de Riccati

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P,$$

par une transformation telle que

$$\gamma = \frac{y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1 y}{b_{n-1}y^{n-1} + \ldots + 1}.$$

Quand la chose est possible, elle n'est possible que d'une seule manière, et M, N, P, a_{n-1}, ..., a_1, b_{n-1}, ... sont déterminés par des opérations linéaires.

On simplifie considérablement ces opérations en introduisant la transformation

$$(\alpha) \qquad y = \frac{hy_1 + h_1}{ky_1 + k_1}, \qquad x = \varphi(x_1),$$

h, h_1, k, k_1 étant des fonctions de x_1. Cette transformation (α) est la plus générale, qui conserve à la fois la forme de l'équation (1′) et le nombre des valeurs de y qui se permutent autour des points critiques mobiles.

Nous faisons de cette transformation une étude détaillée, analogue à celle qu'a faite M. Appell [1] de la transformation

$$y = hy_1 + h_1, \qquad x = \varphi(x_1).$$

Nous disons, par définition, que deux équations (1′) sont *de la même classe*, quand elles se laissent déduire l'une de l'autre par une substitution (α). Si λ désigne le degré de P en y, μ le degré Q, ν le plus grand des nombres λ et $\mu + 2$, nous appelons ce nombre ν *le degré du coefficient différentiel de* (1′). Ce nombre ν n'est pas altéré par une transformation (α), et, si l'équation (1′) est la plus générale de sa classe, $\lambda = \nu$, $\mu = \nu - 2$. Pour que deux équations (1′) soient de la même classe, il faut d'abord que les degrés ν et ν_1 de leurs coefficients diffé-

---

(1) APPELL, *Invariants de quelques équations différentielles* (*Journal de Mathématiques*; 1889).

rentiels soient égaux; ensuite, que les $(2\nu - 1)$ coefficients des deux équations satisfassent à $(2\nu - 5)$ relations. Ces relations expriment qu'il existe une fonction $x = \varphi(x_1)$ qui transforme l'un dans l'autre les $(2\nu - 4)$ invariants $J(x)$, $J_1(x_1)$ des deux équations, *invariants* relatifs au *groupe* des substitutions (α).

Pour mettre en évidence ces invariants, nous indiquons deux procédés généraux de réduction d'une équation (1') à des formes *canoniques :* le premier, identique à celui qu'emploie M. Appell dans le Mémoire déjà cité, consiste à faire disparaître de l'équation (1') le plus grand nombre possible de termes. Il conduit, par des quadratures, à des invariants qui dépendent de constantes arbitraires. Le second ramène algébriquement l'équation (1) à une forme telle qu'un nombre fini seulement d'équations réduites appartiennent à la même classe. Les nouveaux invariants ainsi introduits dépendent algébriquement des coefficients de (1') et de leurs dérivées. Ils ont l'avantage de ne pas entraîner avec eux de quadratures et de constantes parasites. Les propriétés d'une équation (1'), invariantes dans la transformation (α), se traduisent par des relations différentielles dont l'ordre est moins élevé avec les seconds invariants qu'avec les premiers.

C'est ainsi, par exemple, que l'équation

$$y' = \frac{a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0}{b_1 y + b_0}$$

se laisse ramener à une des formes canoniques

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + J(X),$$

équation canonique de première espèce, et

$$\frac{dY}{dX} = K(X)(Y^2 + 3XY + 1),$$

équation canonique de seconde espèce. Les fonctions $J(X)$ et $X(x)$ d'une part, $K(X)$ et $X(x)$ d'autre part sont des invariants.

Il existe toutefois des équations (1') qui ne sont pas susceptibles de se laisser ramener aux formes canoniques de seconde espèce. Ce sont les équations qui admettent un groupe continu de transformations (α). Nous établissons, au sujet de ces équations, ce théorème général :

Soit une équation du premier ordre quelconque

$$y' = f(x, y),$$

où f est une fonction analytique de (x, y). Quand une telle équation admet un groupe continu de substitutions (α), elle se ramène sans quadrature à l'une des formes

$$y' = ay + by^k$$

(k est un nombre constant quelconque) ou

$$y' = \varphi(x) R(y),$$

et, par suite, elle s'intègre à l'aide de deux quadratures. Seule l'equation de Riccati fait exception à ce théorème.

Ces équations mises à part, les formes réduites de seconde espèce se prêtent, aussi bien que les premières, à mettre en évidence des cas d'intégration des équations ($1'$). Ce sont elles surtout qui nous servent à simplifier les calculs qu'exige le problème que nous nous sommes posé. Le principal avantage de ces formes canoniques réside dans cette remarque bien simple : quand la valeur $y = 0$ est racine multiple de Q d'ordre α, les coefficients $B_1, B_2, \ldots, B_\alpha$ sont nuls dans l'équation

$$(\beta) \qquad y^n + (A_{n-1}\gamma + B_{n-1})y^{n-1} + \ldots + (A_1\gamma + B_1) + \gamma = 0,$$

qui définit l'intégrale de ($1'$) avec la condition

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

De même, si Q admet une racine y infinie d'ordre β (c'est-à-dire si $\mu = \nu - 2 - \beta$), les coefficients $A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_{(n-\alpha-1)}$ sont nuls. Par exemple, quand $y = 0$ est racine de $P = 0$ d'ordre $(n-1)$, l'équation (β) se réduit à

$$y^n + B_{n-1}y^{n-1} + \ldots + B_1 y + \gamma = 0.$$

Si y' a deux infinis d'ordre $(n-1)$, soit $y = 0$, $y = \infty$, il vient

$$y^n + \gamma = 0;$$

l'équation est de la classe de celles qui se déduisent d'une équation de Riccati en γ par le changement de γ en y^n.

Nous appliquons ces remarques en particulier aux exemples $n = 2$, $n = 3$. Pour $n = 2$, on a

$$\nu = 4 \quad \text{ou} \quad \nu = 3;$$

pour $n = 3$, on a

$$\nu = 6,\ 5,\ 4 \text{ ou } 3.$$

Nos calculs mettent en évidence ce fait remarquable qu'on peut démontrer d'une façon générale : *Quand n n'est pas égal précisément à $\frac{\nu}{2}$ (n ne saurait être inférieur à $\frac{\nu}{2}$), on connaît toujours au moins une solution de l'équation de Riccati en γ*. Le problème se résout donc à l'aide de deux quadratures au plus. *Quand n est supérieur à $\nu - 1$, on connaît toujours au moins deux solutions de la même équation.* Le plus fréquemment, on obtient γ sans quadrature : nous apprenons d'ailleurs à distinguer les différents cas où l'on connaît une, deux ou trois intégrales particulières distinctes.

Ces propositions sont susceptibles d'être étendues aux équations (1) de genre p quelconque, ϖ étant toujours supposé nul. L'équation (6) dont nous nous servons se simplifie là encore, quand $y = 0$ ou $y = \infty$ sont des valeurs de y rendant y' infinie. De même, si l'équation donnée, de degré m en y', n'est pas de l'espèce la plus générale qui corresponde à la valeur de n (ce qui arrivera toujours pour n suffisamment grand), des intégrales particulières de (1) se mettront en évidence. Toutefois, les choses se présentent alors d'une façon plus compliquée, à cause de la double espèce des points critiques de l'équation, et je me borne pour le moment à ces indications sur ce sujet.

Dans tout ce qui précède, nous n'avons rien supposé sur la nature des points critiques fixes. Quelles simplifications entraîne l'hypothèse que l'*intégrale $y(x)$ est algébrique dans tout le plan?* Si l'on a reconnu que l'intégrale prend un nombre fini n de valeurs autour des points critiques mobiles, il faut, de plus, que l'intégrale de l'équation à points critiques fixes

$$h\left[r, \frac{dr}{dx}, (x)\right] = 0$$

ait son intégrale algébrique. Si ϖ est supérieur à 1, il suffit que les coefficients de h soient algébriques en x. Quand $\varpi = 1$, le problème revient à reconnaître si l'intégrale d'une équation

$$\frac{dt}{dx} = \mathrm{H}(x)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$$

est algébriqne. Quand $\varpi = 0$, le problème se résout algébriquement ou l'équation se ramène à la quadrature

$$\frac{t'}{t} = \mathrm{H}(x),$$

ainsi qu'il ressort des propriétés de l'équation de Riccati.

Si l'on se donne le nombre N des déterminations de l'intégrale algébrique $y(x)$ dans le plan, la question, quand $\varpi = 0$, se résout algébriquement; quand $\varpi = 1$, elle revient encore à reconnaître si une intégrale abélienne de première espèce est la transformée rationnelle d'une intégrale elliptique.

En particulier, on reconnait algébriquement si l'intégrale $y(x)$ d'une équation (1), de genre $p = 0$, est une fonction algébrique à N valeurs : l'intégrale s'obtient elle-même algébriquement.

Posons-nous maintenant la même question sans nous donner ni n ni N; autrement dit, cherchons à déterminer *si l'intégrale d'une équation* (1) *est algébrique*. En nous servant de la première méthode d'intégration (après avoir effectué sur x, y une transformation homographique), nous montrons qu'on reconnait algébriquement s'il en est ainsi, dans l'hypothèse $\varpi > 1$; dans l'hypothèse $\varpi = 1$, on ramène l'équation à une équation de la forme

$$\varphi(y)\,dy = \psi(x)\,dx$$

dont l'intégrale doit être algébrique. Mais la méthode ne fournit aucun renseignement sur le cas de $\varpi = 0$. Par conséquent, les équations entières en y', y, x

$$\mathrm{F}(y', y, x) = 0,$$

et de genre 0 en (y', y), lui échappent toujours.

Nous traitons toutefois, au sujet de ces dernières équations, certaines questions particulières. Nous les ramenons d'abord à la forme

$$\frac{dy}{dx} = R(y, x) = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)},$$

où P et Q sont deux polynômes en y, x. Dans l'étude qui nous occupe maintenant, y et x jouent un rôle symétrique; on peut leur faire subir une transformation rationnelle quelconque, par exemple une transformation de Cremona. Les points singuliers intrinsèques de l'équation sont alors les points communs aux courbes $P = 0$, $Q = 0$. Certaines propriétés de ces points suffisent parfois à décider si l'intégrale de l'équation est ou non algébrique; mais le genre de cette intégrale est alors nécessairement nul. Des procédés analogues permettent, dans bien des cas, de calculer les intégrales algébriques de genre donné et, dans tous les cas, les intégrales rationnelles particulières. Mais le problème qui consisterait à calculer les intégrales algébriques sans aucune donnée *a priori* ne semble pas près d'être résolu.

La conclusion générale à laquelle nous arrivons est identique à celle de M. Poincaré dans son étude des équations de M. Fuchs. Les intégrales générales à n valeurs des équations du premier ordre sont des transcendantes qui ne diffèrent pas de celles que définissent les quadratures ou les équations linéaires. C'est là une distinction essentielle entre les équations du premier ordre et celles du second. Pour trouver quelque analogie entre les deux espèces d'équations, il faut se borner à considérer les équations d'ordre supérieur dont l'intégrale y dépend algébriquement des constantes $y_0, y'_0, \ldots$. Encore ne peut-on fixer (comme dans le cas du premier ordre) une limite supérieure du degré auquel figurent ces constantes dans la relation

$$\Phi[y, y_0, y'_0, \ldots, (x), (x_1)] = 0,$$

qui définit l'intégrale générale. Toutefois, la théorie des transformations rationnelles des surfaces permet d'étendre notre première méthode d'intégration à cette classe d'équations d'ordre supérieur; les résultats que nous obtenons ainsi et que nous énonçons succinctement au cours de ce Mémoire, et la méthode même qui nous y conduit, constituent une extension des travaux déjà cités de M. Picard relatifs aux équations du second ordre.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

---

1. Soit

$$F[y, y', (x)] = 0 \tag{1}$$

une équation différentielle du premier ordre, algébrique et irréductible en y, y', dont les coefficients $A(x)$ dépendent de x d'une façon quelconque, et

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

une des valeurs de y' qui satisfont à l'équation (1). L'intégrale $y(x)$ d'une telle équation possède certaines propriétés fondamentales que nous allons rappeler :

Si une intégrale $y(x)$ tend vers y_0 quand x tend vers x_0, $f(x_0, y_0)$ étant holomorphe, cette intégrale est elle-même holomorphe dans le voisinage de x_0 et développable par suite en série de Taylor dont on connaît les coefficients. Il n'existe pas d'autre intégrale prenant au point x_0 la valeur y_0, quand x tend vers x_0 sur un chemin de longueur finie.

Quand $f(x, y)$ n'est pas holomorphe en x_0, y_0, cette fonction peut être, ou non, uniforme dans le voisinage de x_0, y_0. Plaçons-nous d'abord dans le premier cas.

Nous admettons que x_0 n'est pas un point singulier X_i des coefficients A de (1).

Si la valeur de $f(x_0, y_0)$ est infinie, il existe toujours une dérivée de $\frac{1}{f}$ par rapport à y d'un certain ordre, $\frac{\partial^p\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial y^p}$ par exemple, qui ne s'annule pas pour (x_0, y_0) et le point x_0 est un point critique algébrique de $y(x)$ autour duquel se permutent $(p+1)$ valeurs.

Quand x tendant vers x_0, y tend vers l'infini, on pose $y = \frac{1}{y_1}$, et la fonction y vérifie l'équation

$$\frac{dy_1}{dx} = -y_1^2 f\left(x, \frac{1}{y_1}\right) = f_1(x, y_1).$$

Si $f_1(x, 0)$ est holomorphe, x_0 est un pôle de $y(x)$; si $f_1(x, 0)$ est infinie, x_0 est un point critique algébrique de $y(x)$.

Ce qui précède s'étend au cas où le point x_0 est le point ∞ du plan de la variable complexe x. On pose alors $x = \frac{1}{x_1}$; l'intégrale $y\left(\frac{1}{x_1}\right)$ vérifie l'équation

$$\frac{dy}{dx_1} = -\frac{1}{x_1^2} f\left(\frac{1}{x_1}, y\right) = f_2(x_1, y),$$

et on étudie cette équation dans le voisinage de $x_1 = 0$.

Enfin, $f(x_0, y_0)$ peut être indéterminée, c'est-à-dire qu'au voisinage de x_0, y_0 la fonction f se présente sous la forme

$$\frac{P(x_0, y_0)}{Q(x_0, y_0)},$$

P et Q étant deux fonctions entières de x, y qui s'annulent pour $x = x_0$, $y = y_0$. Ceci ne peut avoir lieu que pour des valeurs particulières X'_i de x et Y'_i de y. X'_i ? Le point $x = X_i$ peut être un point transcendant singulier de $y(x)$. Les travaux de MM. Briot et Bouquet, E. Picard, H. Poincaré permettent d'étudier $y(x)$ dans le voisinage du point X_i.

Passons au cas où $f(x, y)$ n'est pas uniforme dans le voisinage de $x = x_0$, $y = y_0$.

Nous supposons encore que x_0 n'est pas un des points singuliers X_i des coefficients de l'équation (1). Dans ces conditions, un nombre fini d'intégrales y deviennent égales à y_0 en x_0 et admettent ce point x_0 comme point critique algébrique. Il n'y a d'exception que si la quantité

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'$$

est nulle pour $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = f(x_0, y_0)$. En général, les trois relations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

ne sont compatibles que pour des valeurs exceptionnelles X''_i de x. Mais au cas même où ces trois relations sont vérifiées, quel que soit x, quand x et y satisfont à une certaine relation

$$g(x, y) = 0,$$

l'équation admet une intégrale singulière, et le point x est un point algébrique de $y(x)$, sauf pour certaines valeurs particulières X''_i de x, qui satisfont à une troisième condition distincte des relations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Je renvoie pour la démonstration de ces propriétés au Mémoire de MM. Briot et Bouquet (*Journal de l'École Polytechnique*, année 1856).

Nous voyons, en résumé, que si y tend vers y_0 quand x tend vers x_0, le point x_0 est un point algébrique de $y(x)$, et il n'existe qu'un nombre limité d'intégrales y prenant en x_0 la valeur y_0.

Il n'y a d'exception que si x_0 coïncide avec certains points singuliers ξ_i (ou X_i, X'_i, X''_i) du plan des x, points qu'on peut déterminer, *a priori*, quand on connaît l'équation (1). Ces points peuvent être des points singuliers transcendants de l'intégrale $y(x)$, et une infinité d'intégrales y peuvent prendre la valeur y_0.

Mais, dans cette discussion, nous avons admis que, x tendant vers x_0, y tendait vers y_0. Peut-il arriver que y ne tende vers aucune limite? Pour les valeurs singulières ξ_i de x_0, le cas se présente fréquemment, comme le montrent les exemples les plus simples. Ainsi l'intégrale générale $y = Ce^{\frac{1}{x}}$ de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2}$$

admet le point $x = 0$ comme point singulier essentiel. Quand x_0 est un pôle ξ de $y' = f$ quel que soit y, on sait même que y est nécessairement indéterminée ou tend vers une des valeurs y_0 qui donnent à $f(x_0, y_0)$ la forme $\frac{0}{0}$. Si donc toutes les intégrales ne prennent pas la même valeur pour $x = \xi$, elles admettent nécessairement ce point comme point singulier transcendant (point essentiel qui peut être aussi critique).

La même chose peut-elle avoir lieu pour une valeur x_0 quelconque de x? Avant de répondre à cette question, voyons un peu ce qui se passe pour les équations d'ordre supérieur

$$F[y, y', y'', \ldots, y^{(p-1)}, y^{(p)}, (x)] = 0.$$

Les propositions que nous venons d'énoncer ont leurs analogues dans la théorie de ces équations, et permettent d'étudier, dans le voisinage de x_0, l'intégrale $y(x)$ qui, pour $x = x_0$, satisfait aux conditions

$$y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(p-1)} = y_0^{p-1}.$$

Mais il est facile de former des exemples de telles équations dont l'intégrale $y(x)$ devient indéterminée pour des valeurs x_0 quelconques. Soit l'équation

$$(yy'' - y')^2 + 4yy'^3 = 0;$$

son intégrale générale est

$$y = be^{\frac{1}{x-a}},$$

b et a désignant des constantes. On voit que, pour une valeur quelconque $x = a$, une infinité d'intégrales deviennent indéterminées.

Considérons de même la fonction modulaire

$$y = \varphi^8(x).$$

Cette fonction satisfait à une équation différentielle du troisième ordre algébrique, formée pour la première fois par Jacobi; l'intégrale de cette équation est une fonction uniforme qui admet un cercle entier de points singuliers, et ce cercle varie avec les constantes d'intégration.

Le même fait se produit quand on remplace la fonction modulaire par une fonction fuchsienne quelconque définie seulement à l'intérieur du cercle fondamental. Bien plus, parmi les fonctions fuchsiennes, il en est qui admettent des lignes singulières non analytiques. Ces lignes ont une tangente en chaque point, mais n'ont pas de cercle osculateur. L'intégrale de l'équation du troisième ordre correspondante admet donc de telles lignes singulières, variables avec les constantes d'intégration.

Ces difficultés, mises en lumière par les travaux récents de M. Picard [1] sur les équations d'ordre supérieur, se peuvent-elles rencontrer dans les équations du premier ordre? Il n'est pas évident que la réponse doive être négative, et il convient de le démontrer. Je renvoie pour cette démonstration à un Mémoire [2] *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques,* et je me borne à énoncer les propriétés suivantes, caractéristiques des équations du premier ordre, et qui servent de point de départ aux méthodes d'intégration que nous exposerons ensuite.

2. En premier lieu, si un point x_0 du plan des x est un point singulier non algébrique de l'intégrale $y(x)$, ce point coïncide nécessairement avec un des points particuliers ξ_i signalés plus haut. L'intégrale ne saurait donc présenter de point essentiel variable avec la constante d'intégration.

Soit maintenant une aire S quelconque du plan des x ne renfermant aucun de ces points ξ_i, et une aire Σ, de contour σ, intérieure à S. Toute intégrale $y(x)$, qui ne prend dans S qu'un nombre fini de valeurs, est continuable au delà de σ et ne présente dans Σ que des pôles ou des points critiques algébriques.

Distinguons maintenant, comme nous l'avons indiqué dans l'Introduction, parmi les points critiques d'une intégrale $y(x)$, ceux qui varient et ceux qui restent fixes quand la constante d'intégration varie. Les points critiques de seconde espèce sont certains points ξ'_i particuliers (qui font partie du groupe des ξ_i). Joignons-les, comme il a été dit, par des coupures, de façon qu'un point du plan des x, qui se meut sans franchir ces coupures, puisse atteindre un point quelconque x, mais ne décrive jamais un circuit fermé autour d'un ou plusieurs points ξ'_i.

---

(1) E. Picard, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Mathématiques,* 1889).

(2) *Annales de la Faculté de Toulouse* (janvier 1888, p. 39, 44). Je saisis cette occasion de rectifier une erreur historique qui s'est glissée dans l'Introduction de ce Mémoire (p. 2). Le théorème de M. Mittag-Leffler sur la décomposition en somme d'une fonction ayant dans le plan une infinité de pôles a été publié par son auteur dès l'année 1877, et est antérieur, par conséquent, aux travaux analogues, portant sur la décomposition en sommes ou en produits de fonctions affectées de coupures particulières.

Si, dans ces conditions, l'intégrale y n'acquiert que n valeurs, autrement dit si l'intégrale ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, elle ne saurait présenter ni lignes singulières, ni points essentiels (en dehors des ξ_i).

Quand les coefficients de l'équation (1)

$$F[y', y, (x)] = 0 \tag{1}$$

ne sont définis que dans une portion du plan des x, le même théorème vaut pour cette partie du plan.

Considérons maintenant l'intégrale générale de l'équation (1),

$$y = \varphi(y_0, x),$$

et admettons que cette intégrale générale ne prenne que n valeurs autour des points critiques mobiles. En s'aidant des propositions précédentes, on montre que y est une fonction analytique de y_0, qui, pour une valeur quelconque donnée à x, ne présente dans le plan des y_0 ni ligne singulière, ni point essentiel.

Il est facile, dès lors, de voir que y est une fonction algébrique de y_0. Pour rendre le raisonnement plus clair, admettons d'abord que les coefficients $A_i(x)$ de l'équation (1) soient des fonctions uniformes de x et que l'intégrale $y(x)$ ne prenne que n valeurs dans tout le plan des x.

Donnons à x_0 une valeur quelconque, et faisons varier y_0. Pour chaque couple (x_0, y_0), y' est susceptible de m valeurs, si m est le degré de F en y'. Soit y'_0 l'une de ces valeurs. L'intégrale $y(x)$ qui satisfait aux conditions

$$y(x_0) = y_0,$$
$$y'(x_0) = y'_0$$

est déterminée sans ambiguïté par l'équation différentielle

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

$[f(x_0, y_0) = y'_0]$.

Soient, d'autre part, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les n valeurs que prend en x une des intégrales y. Ces n valeurs sont bien déterminées pour chaque intégrale particulière et, par suite, une fonction symétrique de ces n quantités, soit $z_1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, n'admet qu'une valeur pour un système (y_0, y'_0) donné. Si l'on veut encore, z est une fonction uniforme du point analytique (y_0, y'_0) de la courbe

$$F_0[y_0, y'_0, (x_0)] = 0,$$

ou encore une fonction à m valeurs de y_0.

Cette remarque s'applique à toutes les fonctions symétriques, notamment aux suivantes :

$$\begin{aligned} z_2 &= y_1 y_2 + y_1 y_3 + \ldots + y_{n-1} y_n, \\ z_3 &= y_1 y_2 y_3 + \ldots + y_{n-2} y_{n-1} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_n &= y_1 y_2 y_3 \ldots y_n. \end{aligned}$$

Mais on a

$$y^n - z_1 y^{n-1} + \ldots \pm z_n = 0.$$

Donc y est une fonction de y_0 à mn valeurs. Inversement y_0 est une fonction de y à mn valeurs. Comme d'ailleurs la fonction $y(y_0)$ ne présente que des points singuliers algébriques, la relation entre y et y_0 est une relation algébrique de degré mn par rapport à y et y_0 respectivement

$$G[y, y_0, (x), (x_0)] = 0.$$

Le raisonnement s'étend sans peine au cas où les A_i sont des fonctions quelconques de x, et où y admet des points critiques fixes (en dehors des points critiques mobiles).

Pour le voir, joignons encore les points ξ'_i, ξ_i par des coupures, et faisons varier x dans le plan, en partant d'un point x_0 quelconque avec des valeurs déterminées, pour x_0, des A_i, de y_0 et de y'_0. Si nous ne franchissons aucune coupure, les coefficients de l'équation (1) sont des fonctions de x qui gardent une valeur unique; d'autre part, il existe une intégrale particulière $y(x)$ et une seule qui satisfait aux conditions

$$y(x_0) = y_0, \qquad \frac{dy}{dx}(x_0) = y'_0,$$

en même temps qu'à l'équation (1)

$$F(y, y', x) = 0,$$

où les coefficients A_i gardent cette valeur déterminée. Cette intégrale

$y(x)$, quand x varie dans les conditions indiquées, ne peut prendre en un point x que les n valeurs qui se permutent autour des points critiques mobiles $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Une fonction symétrique quelconque de ces quantités ne prend donc qu'une valeur (quand on laisse x constant) pour un système quelconque (y_0, y'_0). Autrement dit, $z_1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ par exemple est une fonction uniforme du point analytique (y_0, y'_0) de la courbe

$$F[y_0, y'_0, (x_0)] = 0.$$

Ce point établi, le raisonnement s'achève comme ci-dessus.

Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que la relation

$$F[y, y'_0, (x)] = 0 \tag{1}$$

était algébrique en y et y'. La démonstration des propriétés énumérées exige seulement, comme on pourra s'en convaincre en se reportant au Mémoire déjà cité, que y' soit une fonction analytique de y à m branches qui, pour une valeur quelconque de x, ne présente pas dans le plan des y de ligne singulière.

Soit donc une telle équation (1). Son intégrale, si elle ne prend autour des points critiques mobiles que n valeurs, doit vérifier une équation

$$G[y, y_0, (x), (x_0)] = 0 \tag{3}$$

de degré mn en y et y_0, et dont les coefficients sont des fonctions quelconques de x et de x_0. Si on élimine y_0 entre (3) et l'équation

$$\frac{\partial G}{\partial y} y' + \frac{\partial G}{\partial x} = 0,$$

le résultat est algébrique en y et y'. Nous sommes ainsi conduit à la conclusion suivante :

Désignons par $f[(x), y]$ une fonction de y à m déterminations qui ne présente pas de ligne singulière pour $x = x_0$ (x_0 étant quelconque). *Quand l'équation*

$$y' = f[(x), y]$$

a pour intégrale générale une fonction qui ne prend que n valeurs autour *des points critiques mobiles, f est nécessairement une fonction algebrique de y.*

Les seules équations que nous considérerons dans ce Mémoire seront donc des équations algébriques en y' et y, où x figurera d'une façon quelconque.

3. Études maintenant avec plus de détail la forme de l'intégrale générale de l'équation

$$F[y, y', (x)] = 0 \tag{1}$$

par rapport aux constantes.

Désignons par n le nombre des valeurs de $y, y_1, y_2, \ldots, y_n$ qui se permutent effectivement autour des points critiques mobiles. Nous avons dit qu'une fonction symétrique quelconque z de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ était une fonction uniforme de (y_0, y'_0), et comme d'autre part z dépend algébriquement de y_0, on a

$$z = R[y_0, y'_0, (x_0), (x)],$$

R désignant une fraction rationnelle en y_0, y'_0, dont les coefficients dépendent de x_0 et de x d'une façon quelconque. Il en résulte que l'intégrale y peut s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} y^n + R_{n-1}[y_0, y'_0, (x_0), (x)]y^{n-1} \\ \quad + R_{n-2}[y_0, y'_0, (x_0), (x)]y^{n-2} + \ldots + R_0[y_0, y'_0, (x_0), (x)] = 0. \end{array} \right. \tag{4}$$

Les constantes y_0, y'_0 sont assujetties à la condition

$$F[y_0, y'_0, (x_0)] = 0; \tag{5}$$

x_0 est choisi arbitrairement, par exemple $x_0 = 0$. Inversement, quand l'intégrale de (1) vérifie une équation telle que (4), elle prend au plus n valeurs autour des points critiques mobiles.

Quand n est le nombre des branches de y qui se permutent effectivement autour des points critiques mobiles, l'intégrale ne peut se mettre sous une forme telle que (4), où n aurait une valeur inférieure. De plus, il n'existe pas deux équations (4) distinctes. Autrement dit, soit

$$y^n + r_{n-1}[C, (x)]y^{n-1} + \ldots + r_0[C, (x)] = 0 \tag{4'}$$

une seconde relation que vérifie l'intégrale. Dans (4′), r_i désigne une fonction de x dont les points critiques ne dépendent pas de la constante C. Pour une intégrale quelconque y, on a

$$y_1+y_2+\ldots+y_n=-\mathrm{R}_{n-1}[y_0, y'_0, (x_0), (x)]=-r_{n-1}[\mathrm{C}_0, (x)],$$

et de même pour R_i et r_i, c'est-à-dire qu'en faisant correspondre convenablement C à y_0, y'_0, R_i doit coïncider avec r_i.

Il résulte de là que si on forme, en éliminant y_0, y'_0, les relations algébriques qui unissent R_i, R_j d'une part, R_i, $\frac{d\mathrm{R}_i}{dx}$ d'autre part, le système d'équations ainsi obtenues est *unique*.

Il est clair que ceci cesse d'être vrai quand n n'est pas le nombre des valeurs de y qui se permutent réellement autour des points critiques mobiles (mais un multiple de ce nombre).

Si nous éliminons y'_0 entre (4) et (5), le résultant est une équation de degré mn en y_0 et y respectivement

$$\mathrm{G}[y, y_0, (x), (x_0)]=0.$$

Cette équation ne change pas quand on remplace à la fois y et x par y_0 et x_0, y_0 et x_0 par y et x. Elle est exactement de degré mn et irréductible si x et x_0 sont quelconques; autrement, l'intégrale satisferait à une relation

$$g[y, y_0, (x), (x_0)]=0$$

de degré ν en y_0 et en y, ν étant inférieur à mn : ν doit être en tous cas un multiple de n, $\nu=m'n$, et pour chaque valeur de y_0, y prend $m'n$ valeurs distinctes. Mais l'équation irréductible (1) admet m racines y'_0 quand y_0 est donné, et à chaque groupe (y_0, y'_0) correspond (si y_0, x_0 sont quelconques) une intégrale distincte à n valeurs, donc mn valeurs distinctes de y correspondent à y_0 : m' ne peut être inférieur à m.

Il est clair d'ailleurs que de l'équation (4) on peut déduire une infinité d'équations de même forme, mais dont le degré en y est un multiple de n. A de telles équations les remarques précédentes ne s'appliqueraient pas.

Revenons à l'égalité (4) elle-même. Nous pouvons l'écrire aussi bien

$$y_0^n+\mathrm{R}_{n-1}[y, y', (x)]y_0^{n-1}+\ldots+\mathrm{R}_0[y, y', (x)]=0. \tag{6}$$

Sous cette forme, on voit que, quand on remplace dans $R_i[y, y', (x)]\, y$ par une intégrale particulière de (1) et y' par sa dérivée, R_i devient une constante, à savoir (au signe près) la somme des produits i à i des valeurs en x_0 de l'intégrale considérée.

L'intégrale de (1) se laisse donc définir par l'égalité

$$R_i[y, y', (x)(x_0)] = R_i[y_0, y'_0, (x_0), (x'_0)] = C_i, \tag{7}$$

C_i désignant une constante, et y' la fonction de y et x déterminée par l'équation

$$F[y, y', (x)] = 0. \tag{1}$$

Une telle forme de l'intégrale a été indiquée depuis longtemps par M. Fuchs dans le cas où l'intégrale de (1) est algébrique. Mais je veux insister surtout sur les rapports des diverses relations (7) qui peuvent représenter l'intégrale.

Il est clair que de l'équation (7) on en peut tirer une infinité d'autres, en posant

$$r = \varphi(R_i),$$

φ étant rationnel en R. Plus généralement

$$r = \varphi(R_1, R_2, \ldots, R_n)$$

jouit de la même propriété.

Remarquons encore que l'équation (7), ayant lieu quel que soit x_0, peut se différentier par rapport à x_0 et donne

$$\frac{dR_i}{dx_0}[y, y', (x), (x_0)] = \frac{dC_i}{dx_0} = C'_i. \tag{8}$$

Si nous posons

$$\left\{ \begin{aligned} r &= \varphi\left(R_1, R_2, \ldots, R_n, \frac{dR_1}{dx_0}, \frac{dR_2}{dx_0}, \ldots, \frac{dR_n}{dx_0}\right) \\ c &= \varphi(C_1, C_2, \ldots, C_n, C'_1, \ldots, C'_n), \end{aligned} \right. \tag{9}$$

l'intégrale de (1) se laisse définir en égalant r à c.

Inversement, je dis que toute fonction $r(y, y', x)$, rationnelle en y, y', qui, égalée à une constante c, définit l'intégrale de (1), est de la forme (9). Il me suffit de prouver que la constante c s'exprime rationnellement en fonction des constantes $C_1, \ldots, C_n, C'_1, \ldots, C'_n$.

En effet, admettons que, pour les valeurs $C_1, C_2, \ldots, C'_1, \ldots, C'_n$, les égalités

$$\left.\begin{array}{llll} R_1 = C_1, & R_2 = C_2, & \ldots, & R_n = C_n \\ \dfrac{dR_1}{dx_0} = C'_1, & \dfrac{dR_2}{dx_0} = C'_2, & \ldots, & \dfrac{dR_n}{dx_0} = C'_n \end{array}\right\} F[y, y', (x)] = 0$$

soient compatibles quel que soit x. Elles ne peuvent définir qu'une seule intégrale particulière de (1). En effet, on a d'abord

$$y_0^n + C_{n-1} y_0^{n-1} + C_{n-2} y_0^{n-2} + \ldots + C_0 = 0$$

ce qui détermine les n valeurs de y en x_0; ensuite

$$n y_0^{n-1} y'_0 + (n+1) C_{n-1} y_0^{n-2} y'_0 + y_0^{n-1} C'_{n-1} + \ldots + C'_0 = 0,$$

ce qui détermine la valeur de y' en x_0 pour chaque valeur de x_0.

A un système de constantes C_i, C'_j compatibles correspond donc *une seule intégrale particulière*, par suite une seule valeur de c. On en conclut que r est de la forme (9).

Nous donnons à ces fonctions $c = r[y, y', (x)]$, rationnelles en y, y', qui égalées à une constante définissent l'intégrale, le nom de *constantes intégrales*. Soient deux constantes intégrales

$$(10) \qquad \left\{\begin{array}{l} c = r\,[y, y', (x)], \\ c_1 = r_1[y, y', (x)]; \end{array}\right.$$

ces deux constantes sont liées par une relation algébrique. Pour la former, il suffit d'éliminer y, y' entre les équations (1) et (10) : le résultant est indépendant de x. D'après la théorie des irrationnelles algébriques, on peut choisir dans le cas actuel ces deux constantes c, c_1 de façon qu'une constante intégrale quelconque s'exprime rationnellement en fonction de c, c_1,

Il suffit en effet pour cela que les C_i, C'_j s'expriment rationnellement en fonction de c, c_1. Les quantités C_i, C'_j sont liées algébriquement à l'une d'entre elles : ce sont, si l'on veut, les coordonnées d'une courbe de l'espace à $2n$ dimensions. Or on peut faire toujours correspondre birationnellement à une telle courbe une courbe de l'espace à deux dimensions. Soit, par exemple, C_i une des constantes en fonction desquelles s'expriment toutes les autres; posons

$$\gamma = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_n C_n + \mu_1 C'_1 + \ldots + \mu_n C'_n,$$

les λ, μ désignant des nombres quelconques. A chaque valeur de C_i, correspondent k systèmes distincts des C, C', et à ces k systèmes k valeurs distinctes de γ, si les λ, μ ne sont pas choisis d'une façon particulière. Il en résulte que les C, C' s'expriment rationnellement en fonction de C_i et de γ, liés par une certaine relation

$$H(C_i, \gamma) = 0.$$

Il est donc toujours possible de choisir deux constantes intégrales c et c_1, de façon que toutes les autres s'expriment rationnellement en fonction de c, c_1. Ces deux constantes satisfont à une certaine équation

$$H(c, c_1) = 0 \tag{11}$$

que nous appelons relation entre les constantes intégrales.

Si $R[y, y', (x)] = C$ est une constante intégrale, on a

$$C = \varphi(c, c_1),$$
$$R = \varphi(r, r_1).$$

Si deux autres constantes intégrales γ, γ_1 jouissent de la même propriété, γ et γ_1 sont fonctions rationnelles de c, c_1, et réciproquement. Il existe donc une correspondance birationnelle entre la courbe (11) et la courbe

$$H'(\gamma, \gamma_1) = 0.$$

Inversement, quand ces deux courbes ont mêmes modules, γ et γ_1 peuvent remplacer C et C_1.

La relation entre les constantes intégrales n'est donc définie qu'à une transformation birationnelle près.

On voit qu'il existe une correspondance rationnelle

$$\left\{ \begin{aligned} c &= r\,[y, y', (x)], \\ c_1 &= r_1[y, y', (x)] \end{aligned} \right. \tag{12}$$

entre les points c, c_1 de la courbe (11) et les points y, y' de la courbe (1), et cette correspondance définit l'intégrale de (1).

Nous avons appelé genre de l'équation différentielle le genre de l'équation (1) où on laisse x constant. Ce genre p, comme nous le démontrerons dans le prochain Chapitre, est égal ou supérieur au genre ϖ de l'équation

$$H(c, c_1) = 0. \tag{11}$$

Si la substitution (12) est birationnelle, l'équation (1) a ses points critiques fixes. Réciproquement, si l'équation a ses points critiques fixes, on a

$$y = R[y_0, y'_0, (x_0), (x)],$$
$$y' = \frac{dR}{dx}[y_0, y'_0, (x_0), (x)],$$

avec

$$y_0 = R[y, y', (x), (x_0)],$$
$$y'_0 = \frac{dR}{dx_0}[y, y', (x), (x_0)];$$

la transformation est birationnelle, et l'on peut regarder l'équation

$$F[y_0, y'_0, (x_0)] = 0,$$

dont les modules ne dépendent pas de x_0, comme la relation entre les constantes intégrales.

Quand n est quelconque, la transformation rationnelle est d'ordre n, c'est-à-dire que n points y, y' de la courbe (1) correspondent à un point c, c_1 de (11).

On voit comment la théorie des transformations rationnelles des courbes algébriques intervient ici. Nous consacrerons le prochain Chapitre à leur étude. Auparavant, il convient d'ajouter quelques remarques au sujet du choix des constantes c, c_1.

Si nous posons

$$\rho = a_0 R_0 + a_1 R_1 + \ldots + a_{n-1} R_{n-1},$$
$$\gamma = a_0 C_0 + a_1 C_1 + \ldots + a_{n-1} C_{n-1},$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ étant des fonctions quelconques de x_0, je dis que nous pouvons prendre comme constantes c, c_1 les constantes γ, $\frac{d\gamma}{dx_0}$.

Nous avons, en effet,

$$\begin{aligned}\gamma' = \frac{d\gamma}{dx_0} &= a_0 C'_0 + a_1 C'_1 + \ldots + a_{n-1} C'_{n-1} \\ &+ \frac{da_0}{dx_0} C_0 + \frac{da_1}{dx_0} C_1 + \ldots + \frac{da_{n-1}}{dx_0} C_{n-1}.\end{aligned}$$

Pour une valeur x_0, nous pouvons, une fois les valeurs des a_i déterminées, nous donner encore celles des $\frac{da_i}{dx_0}$. Soient

$$C'_0, \quad C'_1, \quad \ldots, \quad C'_{(n-1)}, \quad C_0, \quad \ldots, \quad C_{(n-1)}$$

et

$$C'_{0,1}, \quad C'_{1,1}, \quad \ldots, \quad C'_{(n-1),1}, \quad C_{0,1}, \quad \ldots, \quad C_{(n-1),1}$$

deux systèmes distincts de valeurs C, C′ correspondant à une valeur de γ. Les $\frac{da_i}{dx_0}$ étant laissés quelconques, ces deux systèmes ne donnent pas (pour x_0) la même valeur à γ', à moins que les n différences

$$C_0 - C_{0,1}, \quad C_1 - C_{1,1}, \quad \ldots, \quad C_{(n-1)} - C_{(n-1),1}$$

ne soient nulles. Il résulte de là que les n constantes C s'expriment rationnellement à l'aide de γ, γ'. Mais il faut, de plus, qu'il en soit de même pour les C'_i : c'est ce qui a lieu effectivement, car on a

$$C_i = \varphi[\gamma, \gamma', (x_0)]$$

avec

$$h[\gamma, \gamma', (x_0)] = 0, \qquad \gamma' = \frac{d\gamma}{dx_0};$$

donc

$$C'_i = \frac{dC_i}{dx_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\gamma' + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma'}\frac{\partial\gamma'}{\partial x_0} + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_0} = \psi[\gamma, \gamma', (x_0)],$$

si l'on tient compte de la relation

$$\frac{\partial h}{\partial\gamma}\gamma' + \frac{\partial h}{\partial\gamma'}\frac{d\gamma'}{dx_0} + \frac{\partial h}{\partial x_0} = 0.$$

Nous pouvons donc choisir comme constantes intégrales c, c_1 les constantes γ et γ'.

Si $C = R[y, y', (x)]$ est une constante intégrale, on a

$$C = \varphi[\gamma, \gamma', (x_0)],$$
$$R = \varphi\left[\rho, \frac{d\rho}{dx_0}, (x_0)\right].$$

La relation

$$h[\gamma, \gamma', (x_0)] = 0$$

est une relation entre les constantes intégrales quel que soit x_0; ses modules sont indépendants de x_0.

Il est facile d'ailleurs de s'en rendre compte ainsi; si l'on pose

$$r = a_0(x)\, R_0[y_0, y'_0, (x_0), (x)] + \ldots + a_{n-1}(x)\, R_{n-1}[y_0, y'_0, (x_0), (x)]$$

et

$$\frac{dr}{dx} = r',$$

la relation

$$h[r, r', (x)] = 0$$

est l'équation différentielle qui lie r à x, équation qui a ses points critiques fixes et, par suite, ses modules constants.

De plus, comme on a

$$C_i = \varphi[\gamma, \gamma', (x_0)],$$

ou encore

$$R_i[y, y', (x), (x_0)] = \varphi\left[\rho, \frac{d\rho}{dx_0}, (x_0)\right],$$

on a aussi

$$R_i[y_0, y'_0, (x_0), (x)] = \varphi[r, r', (x)].$$

Enfin, r et r' peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide de r_0, r'_0 qui coïncident, ainsi que ρ_0, ρ'_0, avec γ, γ', et sont liés par la relation

$$h(r_0, r'_0, x_0) = 0,$$

et réciproquement; donc

$$R_i[y_0, y'_0, (x_0), x] = \psi[r_0, r'_0, (x_0), (x)]$$

et, de même,

$$R_i[y, y', (x), (x_0)] = \psi[r, r', (x), (x_0)].$$

Ces résultats peuvent se résumer ainsi :

Si l'on pose

$$r[y_0, y'_0, (x_0), (x)] = a_0(x)\,\mathrm{R}_0[y_0, y'_0, (x_0), (x)] + \ldots \\ + a_{n-1}(x)\,\mathrm{R}_{n-1}[y_0, y'_0, (x_0), (x)],$$

r vérifie une équation différentielle

$$h[r, r', (x)] = 0,$$

dont les points critiques sont fixes. Si l'on pose ~~de même~~

$$r^1 = r[y, y', (x), (x_0)],$$

la fonction r_1, quand on remplace y par une intégrale de (1), vérifie l'équation

$$h\left[r^1, \frac{dr^1}{dx}, (x)\right] = 0.$$

Toute constante intégrale $\mathrm{R}[y, y', (x)] = \mathrm{C}$ peut s'exprimer rationnellement en fonction de r^1 et de $\frac{dr^1}{dx}$:

$$\mathrm{R}[y, y', (x)] = \varphi\left[\rho, \frac{d\rho}{dx_0}, (x_0)\right] = \psi\left[r^1, \frac{dr^1}{dx}, (x)\right],$$
$$\mathrm{C} = \varphi\left[\gamma, \frac{d\gamma}{dx_0}, (x_0)\right] = \psi\left[r, \frac{dr}{dx}, (x)\right].$$

Remarquons que l'intégrale de (1) vérifie aussi bien la relation

$$r[y, y', (x), (x)] = r[y_0, y'_0, (x_0), (x)]$$

que la relation

$$r[y, y', (x), (x_0)] = r[y_0, y'_0, (x_0), (x_0)].$$

On voit ainsi que l'intégrale se laisse mettre d'une infinité de manières sous la forme

$$\mathrm{R}[y', y, (x)] = \mathrm{A}(x, \mathrm{C}),$$

A désignant une fonction de x dont les points critiques sont indépendants de la constante C qui y figure. On démontre, comme précédemment (*voir* p. 40), que toutes les *fonctions intégrales* $R = A(x, C)$ s'obtiennent par les formules

$$A(x, C) = \varphi[C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}, C'_0, \ldots, C'_{n-1}, (x), (x_0)]$$

et

$$R[y, y', (x)] = \varphi[R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}, R'_0, \ldots, R'_{n-1}, (x), (x_0)].$$

On a, par suite,

$$R[y, y', (x)] = \psi\left[\rho, \frac{d\rho}{dx_0}, (x), (x_0)\right]$$

et aussi

$$R[y, y', (x)] = \psi_1\left[r^1, \frac{dr^1}{dx}, (x)\right], \qquad C = \psi_1\left[r, \frac{dr}{dx}, (x)\right].$$

D'une manière générale, *on peut choisir deux fonctions (ou constantes) intégrales*

$$R[y, y', (x)] = A(x, C), \qquad R_1[y, y', (x)] = B(x, C),$$

liées par une relation

$$k[A, B, (x)] = 0,$$

de telle façon que toutes les autres fonctions intégrales (notamment les constantes) s'expriment rationnellement à l'aide des deux premières. Il est loisible de faire

$$R = r^1, \qquad R_1 = \frac{dr^1}{dx},$$

ou encore

$$R = \rho, \qquad R_1 = \frac{d\rho}{dx_0}.$$

Toutes les relations $k = 0$ *ont leurs modules égaux et indépendants de* x.

On remarquera dans le raisonnement précédent l'importance de ce fait que y_0, y'_0, x_0 et y, y', x jouent un rôle symétrique.

Toute relation $K[A^1, B^1, (x)] = 0$ entre deux fonctions (ou constantes) intégrales quelconques se transforme rationnellement dans la relation $k = 0$, et son genre, comme nous le verrons, est au plus égal à ϖ.

4. Indiquons enfin une forme nouvelle de l'intégrale générale de (1). Si l'on élimine y' entre les deux équations

$$R[y, y', (x)] = C$$

et

$$F[y, y', (x)] = 0, \tag{1}$$

le résultant

$$L[y, C, (x)] = 0 \tag{12}$$

est de degré m en C. Son degré en y est un certain multiple de n. Il existe entre (1) et (12) une correspondance birationnelle

$$C = R[y, y', (x)],$$

$$y' = -\frac{\frac{\partial L}{\partial x}}{\frac{\partial L}{\partial y}}.$$

Inversement, chaque fois qu'on a mis l'intégrale de (1) sous la forme

$$L[y, C, (x)] = 0,$$

C entrant dans L au degré m, C s'exprime rationnellement en y, y'; c'est, par suite, une constante intégrale.

En effet, nous avons (1)

$$\frac{\partial L}{\partial y} y' + \frac{\partial L}{\partial x} = 0;$$

pour chaque valeur de y, C prend m valeurs; les m valeurs de y' correspondantes sont distinctes quand y et x sont quelconques. Sinon l'équation en y', de degré m, serait décomposable. Donc à chaque couple y, y' correspond une seule valeur de C.

Si, au lieu d'une constante intégrale, on considère une fonction intégrale, on voit que l'intégrale de (1) satisfait à une infinité d'équations

$$L_1[y, \gamma, (x)] = 0, \tag{12'}$$

---

(1) Cette égalité nous montre que l'intégrale de (1) ne saurait vérifier une équation telle que (12), où C entrerait à un degré μ inférieur à m; car l'équation (1) serait alors de degré μ en y'.

de degré m au plus en γ, où γ désigne une fonction qui vérifie une relation différentielle

$$K[\gamma, \gamma', (x)] = 0$$

dont les points critiques sont fixes.

Mais inversement, quand l'intégrale est mise sous une telle forme, γ n'est pas nécessairement une fonction intégrale. Si cette condition est remplie,

$$\gamma = \rho[y, y', (x)],$$

et l'équation (12′) se transforme rationnellement en (1), mais la réciproque n'est pas vraie en général ([1]).

Il me reste à signaler le cas particulier où le genre ϖ de la relation entre les fonctions et constantes intégrales est nul.

Quand $\varpi = 0$, toutes les fonctions intégrales sont fonctions rationnelles d'une certaine d'entre elles. Soient, en effet, $A(x, C)$, $B(x, C)$ deux fonctions intégrales liées par la relation

$$K[A, B, (x)] = 0.$$

([1]) Il peut arriver que l'intégrale de (1) vérifie une équation telle que (12′), où γ figure à un degré μ inférieur à m : par exemple, l'équation (12′),

$$\gamma^\nu = y,$$

qui est de degré 1 en y, m étant quelconque. On forme aussi aisément des équations dont l'intégrale se laisse mettre sous une forme telle (12′), sans que γ s'exprime rationnellement en y, y', et soit, par suite, une fonction intégrale. Soit l'équation

$$y'^2(1 + x^2) - 4y'yx + 4y(y - 1) = 0 ;$$

son intégrale générale $y = \dfrac{(2x + C)^2}{1 + C^2}$ vérifie la relation

(12′) $$y - \gamma^2 = 0,$$

de degré $\mu = m = 2$ en γ, avec la condition

$$\gamma'(1 + x^2) - 2\gamma'\gamma x + \gamma^2 - 1 = 0,$$

ou encore

$$\gamma = \frac{2x + C}{\sqrt{1 + C^2}}.$$

D'autre part, $\gamma = y^{\frac{1}{2}}$ ne s'exprime pas rationnellement, comme on le voit aussitôt, en fonction de y et de y'.

Le genre de K étant nul, on pose

$$A = \varphi[\gamma, (x)], \qquad B = \psi[\gamma, (x)],$$

avec

$$\gamma = \chi[A, B, (x)],$$

φ, ψ, χ étant rationnels respectivement en γ, A, B. Toutes les fonctions et constantes intégrales s'expriment rationnellement à l'aide de γ, notamment $\frac{d\gamma}{dx}$:

$$\frac{d\gamma}{dx} = \varphi[\gamma, (x)],$$

et, comme cette équation doit avoir ses points critiques fixes, elle se réduit, comme on sait, à une équation de Riccati. Cette fonction intégrale γ n'est déterminée qu'à une transformation près

$$\gamma = \frac{a\gamma_1 + b}{a_1\gamma_1 + b_1},$$

a, b, a_1, b_1 étant des fonctions de x.

En particulier, l'équation

$$h[r, r', (x)] = 0,$$

qui est une des équations $K = 0$, se ramène à une équation de Riccati. Les coefficients $R_i[y_0, y'_0, (x_0), x]$, dans l'équation

$$(13) \qquad y^n + R_1[y_0, y'_0, (x_0), (x)]\, y^{n-1} + \ldots + R_0[y_0, y'_0, (x_0), (x)] = 0,$$

sont fonctions rationnelles d'une constante C, qui entre au degré m. En effet,

$$C = r[y_0, y'_0, (x), (x_0)]$$

et, pour chaque valeur de y_0, prend au plus m valeurs distinctes. Elle n'en peut d'ailleurs prendre moins, sinon l'équation (13) serait de degré moindre que m en C, et l'équation (1) ne serait pas une équation irréductible de degré m en y'.

Donc, quand $\varpi = 0$, l'intégrale se laisse mettre sous la forme

$$l[y, C, (x)] = 0,$$

y entrant au degré n, C au degré m dans cette relation.

Plus généralement, l'intégrale peut se définir par une égalité

$$l_1[y, \gamma, (x)] = 0, \tag{14}$$

de degré n en y, de degré m en γ, avec la condition

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + \Phi.$$

Toutes les équations analogues à (14), de degré n en y, de degré m en γ_1,

$$l'_1[y, \gamma_1, (x)] = 0, \tag{14'}$$

avec la condition

$$\frac{d\gamma_1}{dx} = M_1\gamma_1^2 + N_1\gamma_1 + P_1,$$

se déduisent de (14) par le changement de γ en $\frac{a\gamma_1 + b}{a_1\gamma_1 + b_1}$. En effet, $\gamma_1 = \frac{\lambda C + \mu}{\lambda_1 C + \mu_1}$, et C, qui entre au degré m dans (14′), est une constante intégrale; donc γ_1 est une fonction intégrale et s'exprime rationnellement en γ; de même, γ s'exprime rationnellement en fonction des $R_i(x, \gamma_1)$, $\frac{dR_i}{dx}(x, \gamma_1) = \frac{\partial R_i}{\partial x} + \frac{\partial R_i}{\partial \gamma}\gamma'_1$; donc, enfin, γ s'exprime rationnellement en γ_1 :

$$\gamma = \frac{a\gamma_1 + b}{a_1\gamma_1 + b_1}.$$

Inversement, quand l'intégrale d'une équation (1) se laisse mettre sous une forme telle que (14), le nombre ϖ est nul [1]; car les $R_i[y_0, y_0, (x_0), (x)]$, $\frac{dR_i}{dx}[y_0, y'_0, (x_0), (x)]$ sont donnés rationnellement en fonction de γ, et la relation entre les fonctions intégrales définit une courbe unicursale.

---

[1] Cette proposition subsiste si l'équation (14) est d'un degré quelconque μ en γ. Les raisonnements employés montrent, de plus, qu'une telle équation se déduit d'une équation (14) de degré m en γ_1 par la transformation

$$\gamma_1 = \varphi[\gamma, (x)],$$

φ étant rationnel en γ. Si q désigne le degré de φ en γ, on a

$$\mu = qm.$$

Enfin il existe, entre (14) et (1), une correspondance birationnelle, car

$$\gamma = \rho[y, y', (x)], \qquad y' = -\frac{1}{\frac{\partial l_1}{\partial y}}\left[\frac{\partial l_1}{\partial \gamma}\gamma' + \frac{\partial l_1}{\partial x}\right],$$

et, comme γ' est rationnel en γ,

$$y' = \rho_1[\gamma, y, (x)].$$

Passons au cas où ϖ serait égal à 1. La relation entre les constantes ou les fonctions intégrales peut être ramenée à la forme

$$B^2 = (1 - A^2)(1 - k^2 A^2),$$

le module k^2 étant constant, et toutes les fonctions intégrales s'expriment rationnellement en A, B, notamment $\frac{dA}{dx}$,

$$\frac{dA}{dx} = M[A, (x)] + N[A, (x)]\sqrt{(1 - A^2)(1 - k^2 A^2)}.$$

Si N est nul, M doit être un polynôme du second degré, et, de plus, $B = \sqrt{(1 - A)(1 - k^2 A^2)}$ doit avoir aussi ses points critiques fixes, ce qui exige que $A = \pm 1$, $A = \pm k$ vérifient l'équation de Riccati

$$\frac{dA}{dx} = M[A, (x)].$$

On en conclut

$$M \equiv 0, \qquad A = C, \qquad B = \sqrt{(1 - C^2)(1 - k^2 C^2)}.$$

Si N n'est pas nul, les conditions de M. Fuchs montrent que

$$\frac{dA}{dx} = N(x)\sqrt{(1 - A^2)(1 - k^2 A^2)},$$

$$A = \operatorname{sn}[J(x) + C].$$

L'intégrale de (1) se laisse donc mettre sous la forme

$$(15) \quad \begin{cases} y^n + \{r_{n-1}[C, (x)] + c\rho_{n-1}[C, (x)]\}y^{n-1} + \ldots \\ \quad + r_0[C, (x)] + c\rho_0[C, (x)] \equiv A[y, C, (x)] + cB[y, C, (x)] = 0, \end{cases}$$

C étant une constante, avec la condition

$$c = \sqrt{(1 - C^2)(1 - k^2 C^2)}.$$

On peut lui donner aussi une forme identique où C désigne une fonction de x qui satisfait à une équation

$$\frac{dC}{dx} = N(x)\sqrt{(1-C^2)(1-k^2C^2)}.$$

De plus, si l'on élimine c, le résultant en y et C est de degré $2n$ en y, de degré m en C,

$$l[y, C, (x)] = 0. \tag{15'}$$

Il existe entre $l = 0$ et $F = 0$ une correspondance rationnelle

$$C = R[y, y', (x)], \qquad y' = -\frac{1}{\frac{\partial l}{\partial y}}\left(\frac{\partial l}{\partial C}C' + \frac{\partial l}{\partial x}\right).$$

Deux valeurs de y' correspondent à un système C et y, si C n'est pas une constante.

Toute équation analogue à (15), telle que l'équation (15') correspondante soit de degré m en C, se déduit de l'équation (15) par la transformation

$$C_1 = \frac{C\sqrt{(1-a^2)(1-k^2a^2)} + a\sqrt{(1-C^2)(1-k^2C^2)}}{1-k^2a^2C^2} \tag{16}$$

où a est une fonction de x.

En effet, soit une équation analogue à (15) en y, C_1, c_1, où C_1 satisfait à la relation

$$\frac{dC_1}{dx} = N_1(x)\sqrt{(1-C_1^2)(1-k_1^2C_1^2} = N_1(x)c_1.$$

En différentiant l'équation (15), on voit que y' est de la forme

$$\alpha[y, C_1, (x)] + c_1\beta[y, C_1(x)];$$

si l'on élimine c_1, y' est exprimé rationnellement en fonction de y, C_1,

$$y' = \rho[y, C_1, (x)].$$

Si l'on observe, d'autre part, qu'à chaque valeur de y correspondent (pour x quelconque) m valeurs de C_1 et m valeurs distinctes de y', on voit que C_1 est une fonction intégrale

$$C_1 = R[y, y', (x)].$$

Il en est de même, par suite, de c_1 :

$$c_1 = \frac{1}{N_1(x)} \frac{dC_1}{dx},$$

et C_1, c_1 s'expriment rationnellement en C, c. Pour les mêmes raisons, c et C s'expriment rationnellement en c_1, C_1. Il y a donc correspondance birationnelle entre (c, C) et (c_1, C_1); de là résulte l'égalité (16).

Ceci suppose toutefois $N_1(x) \neq 0$; si N_1 est nul, C_1 est une constante intégrale, par suite c_1, d'après l'équation

$$A_1[y, C_1(x)] + c_1 B_1[y, C_1, (x)] = 0,$$

et la proposition subsiste, à moins que les égalités $A_1 = 0$, $B_1 = 0$ ne définissent toutes deux l'intégrale de (1); mais, dans ce cas, ϖ serait nul, ce qui est impossible puisque la relation entre C et c est de genre 1.

Ajoutons que, toutes les fois que l'intégrale de (1) vérifie une équation identique à l'équation (15), le genre ϖ est égal à l'unité [1]; car les $R_i[y_0, y'_0, (x_0), (x)]$, $\frac{dR_i}{dx}[y_0, y'_0, (x_0), (x)]$ s'expriment rationnellement en c et C, et réciproquement. Il y aurait toutefois exception dans le cas indiqué où, C étant une constante, $A = 0$ et $B = 0$ définiraient l'intégrale de (1). Le genre ϖ serait alors égal à zéro; le radical $\sqrt{(1 - C^2)(1 - k^2C^2)}$ ne figurerait qu'artificiellement.

Tout ce qui précède suppose absolument que n soit égal au nombre

---

(1) Cette remarque est encore vraie quand l'intégrale de (1) vérifie une équation de la forme (15), même si le degré μ en C de l'équation (15') n'est pas égal à m; ϖ est égal à 1, à moins que cette équation (15) puisse se déduire d'une équation (14) par la transformation

$$y = \varphi[C, (x)] + \sqrt{(1 - C^2)(1 - k^2C^2)}\, \psi[C, (x)],$$

où φ et ψ sont rationnels en C; ϖ est nul dans ce dernier cas.

des valeurs de y qui se permutent effectivement autour des points critiques mobiles de l'intégrale.

5. Avant de nous servir de ces généralités pour chercher à intégrer dans certains cas l'équation (1), j'ajouterai un mot sur la différence essentielle qui sépare les équations du premier ordre des équations d'ordre supérieur.

Étant donnée une équation du premier ordre, nous connaissons à l'avance les points du plan des x qui peuvent être des points singuliers transcendants de son intégrale. De plus, quand le point x_0 est un point critique algébrique de l'intégrale $y(x)$ égale à y_0 pour $x = x_0$, nous savons que (y_0, x_0) vérifient l'une des relations

$$P(y, x) = 0, \qquad Q(y, x) = 0$$

qui expriment que y' est infini ou mal déterminé.

Rien de pareil ne subsiste pour les équations d'ordre supérieur. Une intégrale quelconque, uniforme ou à n valeurs dans une certaine portion du plan, peut, nous l'avons dit, présenter dans ce domaine des points essentiels et des lignes singulières variables avec les constantes d'intégration. Ces points peuvent être également des points critiques de l'intégrale. C'est cette difficulté nouvelle qui distingue essentiellement la théorie des équations du premier ordre de la théorie des équations d'ordre supérieur.

Un exemple simple fait ressortir clairement cette différence. Si l'on veut reconnaître que l'intégrale d'une équation du premier ordre n'a que des points critiques fixes, il suffit d'exprimer que, pour aucune valeur de y, x étant quelconque, y' n'est infinie, que la même chose a lieu pour la transformée en $\frac{1}{y}$, enfin que les systèmes (y_0, x_0), pour lesquels deux valeurs de y' s'échangent, correspondent à un point ordinaire x_0 de l'intégrale y, égale à y_0 pour $x = x_0$. On retrouve ainsi les conditions de M. Fuchs. Si l'on veut de plus que l'intégrale soit uniforme, il faut ajouter la condition qu'aucun des points ξ_i ne soit critique.

Quand on sait que l'intégrale ne prend que n valeurs, s'il n'existe aucun point ξ_i qui puisse être un point d'indétermination de y, cette intégrale est nécessairement algébrique. Par exemple, soit une équation

$$F(y', y, x) = 0$$

algébrique et entière en y', y, x. Si le coefficient de la plus haute puissance de y' ne contient aucun facteur de la forme $(x - a)$ (a étant constant), et si de plus le degré en x du coefficient de y'^p surpasse d'au moins $2(p - q)$ unités le degré en x du coefficient de y'^q, toute intégrale à n valeurs est nécessairement algébrique.

Toutes les conditions correspondantes sont nécessaires pour que l'intégrale d'une équation d'ordre quelconque jouisse des propriétés analogues, mais elles ne sont pas suffisantes. Il faudrait encore exprimer que les points d'indétermination possibles des intégrales ne sont pas points critiques, ou sont points critiques algébriques, etc.; or ces points n'apparaissent pas sur l'équation.

Toutefois, les théorèmes que nous avons établis sur la forme de l'intégrale générale, quand elle ne prend autour des points critiques mobiles qu'un nombre fini de valeurs, sont susceptibles d'une certaine extension.

Soit

$$F[y, y', y'', (x)] = 0$$

une équation du second ordre, algébrique en y, y', y'' (F est un polynôme en y, y', y'' de degré m en y''). En raisonnant comme nous l'avons fait, on voit que, si l'on définit l'intégrale y par l'équation

$$y^n + R_{n-1} axy^{n-1} + \ldots + R_0 = 0,$$

les R_i sont des fonctions *uniformes* du point y_0, y'_0, y''_0 de la surface

$$F[y_0, y'_0, y''_0, (x_0)] = 0,$$

c'est-à-dire que y et y' sont des fonctions de y_0, y'_0 à mn valeurs, et réciproquement y_0, y'_0 sont des fonctions de y, y' à mn valeurs. Mais ces fonctions ne sont pas nécessairement algébriques.

En remarquant que l'intégrale s'écrit aussi

$$y_0^n + R_{n-1}[y, y', y'', (x), (x_0)] y_0^{n-1} + \ldots + R_0[y, y', y'', (x), (x_0)],$$

on voit que cette intégrale vérifie les relations

$$\begin{aligned}
R_i[y, y', y'', (x), (x_0)] &= \alpha_i = R_i\ [y_0, y'_0, y''_0, (x_0), (x_0)],\\
\frac{dR_i}{dx}[y, y', y'', (x), (x_0)] &= \beta_i = \frac{dR_i}{dx}[y_0, y'_0, y''_0\ (x_0), (x_0)],\\
\frac{d^2R_i}{dx^2}[y, y', y'', (x), (x_0)] &= \gamma_i = \frac{d^2R_i}{dx^2}[y_0, y'_0, y''_0, (x_0), (x_0)],
\end{aligned}$$

les α_i, β_i, γ_i désignant des constantes. Si l'on pose

$$r[y, y', y'', (x), (x_0)] = \Sigma\lambda_i(x_0)R_i = \Sigma\lambda_i(x_0)\alpha_i,$$
$$r' = \frac{dr}{dx_0}, \qquad r'' = \frac{d^2r}{dx_0^2},$$

en prenant pour les λ_i des fonctions de x_0 *quelconques*, toutes *les constantes intégrales*

$$\rho[y, y', y'', (x), (x_0)] = g$$

s'expriment *uniformément* à l'aide des

$$\begin{aligned} r &= c,\\ r' &= c',\\ r'' &= c''. \end{aligned}$$

Plus généralement, il en est de même pour les fonctions intégrales

$$R[y, y', y'', (x)] = G[(x), C, C'];$$

dans cette égalité, R est une fonction uniforme de y, y', y'', et G une fonction de x dont les points critiques ne dépendent pas des constantes C et C'. On a

$$R = \varphi[r, r', r'', (x)], \qquad G = \varphi[c, c', c'', (x)],$$

φ étant uniforme en r, r', r'' (ou en c, c', c''). Quant aux r, r', r'', ils sont liés dans tous les cas par une relation algébrique

$$h[r, r', r'', (x_0)] = 0,$$

qu'on peut écrire aussi bien, en faisant

$$\rho = \Sigma\lambda_i(x)R_i[y_0, y'_0, y''_0, (x_0), x],$$
$$h\left[\rho, \frac{d\rho}{dx}, \frac{d^2\rho}{dx^2}, (x)\right] = 0,$$

équation différentielle dont les points critiques sont fixes. On peut d'ailleurs remplacer la relation

$$h[c, c', c'', (x_0)] = 0$$

par une transformée birationnelle quelconque. L'intégrale de (1) vérifie les formules

$$\begin{aligned} c &= r\,[y, y', y'', (x)], \\ c' &= r'[y, y', y'', (x)], \\ c'' &= r''[y, y', y'', (x)], \end{aligned}$$

qui établissent une correspondance uniforme entre $h = 0$ et $F = 0$; mais cette correspondance peut être transcendante. Quand elle est rationnelle, l'analogie avec les équations du premier ordre est presque complète. Il convient toutefois de signaler une importante différence : la relation algébrique, de degré mn par rapport à y, entre y, y_0 y'_0, peut être d'un degré quelconque en y_0, y'_0; pour les équations du premier ordre, elle est au contraire de degré mn en y_0.

CHAPITRE II.

DIGRESSION SUR LES TRANSFORMATIONS RATIONNELLES DES COURBES ALGÉBRIQUES.

1. L'étude des transformations birationnelles des courbes algébriques ou des surfaces de Riemann a été l'objet, comme on sait, de travaux considérables. C'est Riemann qui, le premier, en a montré l'importance, et ses idées ont été développées depuis lors par un grand nombre de géomètres : Clebsch, MM. Nœther, F. Klein, etc.

Un des problèmes les plus intéressants qui se rattachent à cette étude consiste à former toutes les substitutions birationnelles qui transforment une courbe algébrique en elle-même ou en une autre courbe donnée. M. Scharwz [1] a montré que, si le genre p de la courbe est

[1] SCHWARZ, *Journal de Crelle*, t. 87.

supérieur à l'unité, il ne peut exister de telles substitutions dépendant d'un paramètre arbitraire. M. F. Klein a complété ce théorème, en indiquant que ces substitutions sont alors en nombre limité. Sa démonstration, qui repose sur les propriétés des groupes fuchsiens, se trouve développée dans un Mémoire de M. Poincaré ([1]), Mémoire qui renferme en même temps une application du théorème à l'intégration des équations différentielles du premier ordre, dont l'intégrale générale n'a que des points critiques fixes. Plus récemment, M. Hurwitz ([2]) a étudié les groupes de substitutions birationnelles qui transforment en lui-même un *domaine algébrique*. Enfin, ces propositions ont été étendues par M. E. Picard ([3]) aux transformations birationnelles des surfaces.

Je me propose d'établir ici, au sujet des transformations *simplement rationnelles* des courbes algébriques, certains théorèmes qui correspondent aux précédents ([4]).

Soient

$$f(y, z) = 0, \tag{1}$$

$$F(y_1, z_1) = 0 \tag{2}$$

les équations de deux courbes indécomposables, la première de genre p et de degré n en z, la seconde de genre p' et de degré n' en z_1.

Supposons qu'il existe une substitution rationnelle permettant de passer de (1) à (2) :

$$\left\{\begin{array}{l} y = \varphi(y_1, z_1) = a_0 + a_1 z_1 + \ldots + a_{n'-1} z'^{n-1}, \\ z = \psi(y_1, z_1) = b_0 + b_1 z_1 + \ldots + b_{n'-1} z_1^{n'-1}. \end{array}\right. \tag{3}$$

Les a_i, b_j désignent des fonctions rationnelles de y, et les fonctions φ et ψ sont telles que le point (y, z) parcourt la courbe (1) quand le point (y_1, z_1) parcourt la courbe (2). Autrement dit, à un point de (2) correspond rationnellement un point de (1), mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

En premier lieu, je dis que φ *et* ψ *ne peuvent renfermer algébrique-*

([1]) H. POINCARÉ, *Sur un théorème de M. Fuchs* (*Acta mathematica*, t. VII).

([2]) HURWITZ, *Nachrichten von der Universität zu Gœttingen*, 20 avril 1887.

([3]) E. PICARD, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. V; 1889).

([4]) *Voir* à ce sujet une Note *Sur les transformations rationnelles des courbes algébriques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, octobre 1887).

ment un paramètre arbitraire t, si le genre p de (1) *est supérieur à l'unité.*

Pour le voir, il suffit de répéter le raisonnement par lequel M. E. Picard [1] démontre le théorème de M. Schwarz.

Soit $J_i(y, z)$ une intégrale abélienne de première espèce de la courbe (1)

$$J_i(y, z) = \int \frac{P_i(y, z)\,dy}{f'_z}.$$

Donnons au paramètre t une valeur quelconque, et remplaçons dans J_i, y et z en fonction de y_1 et z_1 d'après les équations (3). L'intégrale J_i devient une intégrale de première espèce de la courbe (2)

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} J_i(y, z) &= \int \frac{P_i(y, z)}{f'_z}\,dy = J'_i(y_1, z_1) \\ &= \lambda_1 \int \frac{P'_1(y_1, z_1)}{F'_{z_1}}\,dy_1 + \lambda_2 \int \frac{P'_2(y_1, z_1)}{F'_{z_1}}\,dy_1 + \ldots + \lambda_{p'} \int \frac{P'_{p'}(y_1, z_1)}{F'_{z_1}}\,dy_1. \end{aligned}\right.$$

A priori, les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ peuvent dépendre algébriquement de t, puisque φ et ψ sont supposées fonctions algébriques de t; s'il en est ainsi, un au moins de ces coefficients devient infini pour une certaine valeur t_0 de t. Laissons constants y_1, z_1 dans le second membre de l'égalité (4) et faisons tendre t vers t_0. Le point (y, z) se déplace sur la courbe (1) et tend vers une position limite (y', z'); par suite, le premier membre de l'équation (4) reste fini, puisque J_i est une intégrale de première espèce. Au contraire, le second membre croît indéfiniment. Les λ_j ne sauraient donc dépendre de t.

Nous avons dit toutefois que le second membre de (4) devait croître pour $t = t_0$ indéfiniment. Il convient de le démontrer d'une manière plus précise.

Supposons que λ_j soit infini pour $t = t_0$, d'ordre μ_j, et appelons μ le plus grand des nombres μ_j. On peut écrire le second membre de (4)

$$\frac{1}{(t - t_0)^\mu}(\lambda'_1 J'_1 + \lambda'_2 J'_2 + \ldots + \lambda'_{p'} J'_{p'}),$$

les λ'_j restant finis pour $t = t_0$ et n'étant pas tous nuls.

---

(1) E. Picard, *Mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables* (*loc. cit.*).

Donnons à y_1, z_1 des valeurs qui, pour $t = t_0$, n'annulent pas le facteur de $\frac{1}{(t-t_0)^\mu}$. Cela est toujours possible, sinon les p' intégrales J′ vérifieraient identiquement une relation linéaire et homogène à coefficients constants, et ne seraient pas indépendantes. Dans ces conditions, le second membre de (4) croît indéfiniment quand t tend vers t_0.

D'après cela, nous pouvons écrire

$$(5)\qquad \frac{P_i(y, z)\,dy}{f'_z} = \frac{\lambda_1 P'_1(y_1, z_1) + \ldots + \lambda_{p'} P'_{p'}(y_1, z_1)}{F'_{z_1}}\,dy_1,$$

et, de même, en considérant une seconde intégrale abélienne de première espèce J_k de (1),

$$(6)\qquad \frac{P_k(y, z)\,dy}{f'_z} = \frac{\mu_1 P'_1(y_1, z_1) + \ldots + \mu_{p'} P'_{p'}(y_1, z_1)}{F'_{z_1}}\,dy_1.$$

(Dans ces égalités, les λ_j, μ_j sont des constantes.) D'où, en divisant membre à membre,

$$\frac{P_i(y, z)}{P_k(y, z)} = \frac{\lambda_1 P'_1(y_1, z_1) + \lambda_2 P'_2(y_1, z_1) + \ldots + \lambda_{p'} P'_{p'}(y_1, z_1)}{\mu_1 P'_1(y_1, z_1) + \mu_2 P'_2(y_1, z_1) + \ldots + \mu_{p'}(y_1, z_1)}.$$

Laissons fixe le point (y_1, z_1) et faisons varier t : le point (y, z) décrit la courbe (1) et vérifie la relation

$$P_i(y, z) + h\,P_k(y, z) = 0,$$

où h est une constante, ce qui est impossible, les deux polynômes P_i, P_k correspondant à deux intégrales J distinctes.

Les substitutions rationnelles (3) ne sauraient donc renfermer algébriquement un paramètre arbitraire. C. Q. F. D.

Cette proposition établie, nous allons examiner successivement les cas où le genre de la courbe (1) est nul, égal à l'unité, ou supérieur à l'unité.

Auparavant, je ferai la remarque suivante :

Quand on connait une substitution rationnelle qui transforme une courbe donnée en elle-même, on peut en déduire d'autres qui jouissent de la même propriété.

Soit, en effet,

$$(3) \qquad \begin{cases} y = \varphi(y_1, z_1), \\ z = \psi(y_1, z_1) \end{cases}$$

une telle substitution. Remplaçons dans les égalités (3) y_1 par $\varphi(y_2, z_2)$ et z_1 par $\psi(y_2, z_2)$, nous aurons

$$(3)' \qquad \begin{cases} y = \varphi_1(y_2, z_2), \\ z = \psi_1(y_2, z_2). \end{cases}$$

Quand le point (y_2, z_2) parcourt la courbe (1), le point (y_1, z_1) et, par suite, le point (y, z) parcourent la même courbe. Les égalités (3)′ définissent donc une transformation rationnelle de la courbe (1) en elle-même. On en obtiendra une nouvelle en remplaçant, dans les équations (3)′, y_2 et z_2 par $\varphi(y_3, z_3)$, $\psi(y_3, z_3)$, ... On trouve ainsi un nombre indéfini de transformations, à moins qu'on n'arrive à la transformation

$$y = y_n, \qquad z = z_n.$$

Plus généralement, supposons que la substitution (3) permette de passer de la courbe (1) à la courbe (2). S'il existe une substitution rationnelle

$$\begin{aligned} y &= \varpi(Y, Z), \\ z &= \chi(Y, Z), \end{aligned}$$

qui transforme la courbe (1) en elle-même, en remplaçant Y par $\varphi(y_1, z_1)$ et Z par $\psi(y_1, z_1)$, on obtient une nouvelle substitution qui transforme (1) en (2).

De même, si la substitution

$$\begin{aligned} y_1 &= \varpi_1(Y_1, Z_1), \\ z_1 &= \chi_1(Y_1, Z_1) \end{aligned}$$

transforme la courbe (2) en elle-même, quand on remplace, dans les égalités (3), y_1 par $\varpi_1(Y_1, Z_1)$ et z_1 par $\chi_1(Y_1, Z_1)$, la substitution transforme (1) en (2).

Toutes ces remarques sont analogues à des propositions connues de la théorie des transformations birationnelles. Mais il convient de signaler une différence importante : Étant donnés deux systèmes de substitutions qui transforment la courbe (1) en la courbe (2), on peut toujours passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle qui transforme la courbe (1) ou la courbe (2) en elle-même. Ceci n'est plus vrai pour les transformations simplement rationnelles. Connaissant deux transformations rationnelles de la courbe (1) en la courbe (2), on n'en saurait déduire une transformation rationnelle de la courbe (1) [ou de la courbe (2)] en elle-même, à moins, toutefois, qu'une des transformations ne soit birationnelle.

J'ajoute que, si l'on étudie les transformations rationnelles d'une courbe en une autre, il est loisible d'effectuer sur les deux courbes une transformation birationnelle quelconque.

2. Cela posé, supposons d'abord que le genre p de la courbe (1) soit nul. On peut écrire

$$y = g(t), \qquad z = h(t), \tag{7}$$

avec

$$t = k(y, z),$$

g, h, k étant des fonctions rationnelles.

D'après les formules (3), t sera fonction rationnelle de y_1, z_1, et inversement, si t est une fonction rationnelle du point analytique (y_1, z_1), les égalités (7) définissent une correspondance rationnelle entre les deux courbes.

On peut toujours passer d'une courbe de genre 0 à une courbe quelconque par une infinité de substitutions rationnelles; ces substitutions dépendent d'une fonction rationnelle arbitraire du point (y_1, z_1) de la seconde courbe.

Si la transformation est birationnelle, le genre de (2) est également nul; y_1 et z_1 s'expriment rationnellement en t_1; t doit être fonction rationnelle de t_1 et réciproquement, c'est-à-dire que

$$t_1 = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}.$$

Passons maintenant au cas où $p = 1$, et ramenons la courbe (1) à la forme

$$z = \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}.$$

L'égalité (5) devient

$$(5')\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \dfrac{\lambda_1 P'_1(y_1, z_1) + \lambda_2 P'_2(y_1, z_1) + \ldots + \lambda_{p'} P'_{p'}(y_1, z_1)}{F'_{z_1}} dy_1 \\ \qquad = H(y_1, z_1)\, dy_1. \end{cases}$$

La fonction de y_1

$$y = \varphi(y_1, z_1)$$

doit vérifier l'équation (5′), et inversement, quand l'équation (5′) admet une intégrale algébrique $y(y_1)$, qui s'exprime rationnellement en y_1, z_1, cette intégrale $\varphi(y_1, z_1)$ correspond à une transformation rationnelle de (1) en (2). Posons, en effet,

$$y = \varphi(y_1, z_1);$$

il vient

$$z = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} = \frac{dy}{dy_1} \frac{F'_{z^1}}{\lambda_1 P'_1(y_1, z_1) + \ldots + \lambda_{p'} P'_{p'}(y_1, z_1)} = \psi(y_1, z_1),$$

ψ étant rationnel en y_1, z_1.

Si l'équation (5′) admet une telle intégrale, J'_i a toutes ses périodes de la forme

$$m\omega + n\omega',$$

m et n désignant deux entiers.

Inversement, si les périodes de J'_i se réduisent à deux, ω et ω', la fonction elliptique $\operatorname{sn}\mu t$, dont les périodes sont ω et ω', est une fonction rationnelle de (y_1, z_1), quand on y remplace t par $J'_i(y_1, z_1)$, de même que $\operatorname{cn}\mu t$, $\operatorname{dn}\mu t$. Si donc x^2 désigne le module de ces fonctions elliptiques, il existe une substitution rationnelle

$$Y = \varphi(y_1, z_1),$$
$$Z = \psi(y_1, z_1),$$

qui permet de passer de la courbe

$$Z^2 = (1 - Y^2)(1 - x^2Y^2)$$

à la courbe (2) et qui vérifie l'équation

$$\frac{1}{\mu} \frac{dY}{\sqrt{(1-Y^2)(1-x^2Y^2)}} = H(y_1, z_1)\, dy_1.$$

Comparons cette équation à l'équation (5'). Si elle admet une intégrale y rationnelle en y_1, z_1, en appelant α, β les périodes de l'intégrale

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

on a

$$\omega = m\alpha + n\alpha',$$
$$\omega' = m'\alpha' + n'\alpha',$$

ce qui nous montre que Y est liée à y par l'égalité

$$y = \varphi_\nu(\mathrm{Y}),$$

qui définit une transformation d'ordre quelconque ν des fonctions elliptiques : k^2 est lié à x^2 par la relation qui correspond à cette valeur de ν.

Si l'équation (5') admet une intégrale algébrique en y_1, z_1, on a

$$\omega = \frac{m\alpha + n\alpha'}{r},$$
$$\omega' = \frac{m'\alpha' - n'\alpha'}{r},$$

r désignant un entier.

Posons donc

$$y = \operatorname{sn}\frac{t}{r}, \qquad \eta = \operatorname{sn} t;$$

η est une fonction rationnelle de y_1, z_1; y est lié à η par la relation qui donne $\operatorname{sn}\frac{t}{r}$ en fonction de $\operatorname{sn} t$. Il suffit de multiplier par r le second membre de (5') pour que son intégrale soit rationnelle en y_1, z_1.

En définitive, pour que la courbe (2) soit la transformée rationnelle d'une courbe de genre (1), il faut et il suffit qu'une des intégrales J'_i de première espèce de la courbe (2) n'ait que deux périodes distinctes.

Pour que la courbe (2) soit la transformée rationnelle d'une courbe *donnée* (1) de genre 1, il faut de plus que, parmi les intégrales J'_i à deux périodes, il en existe une dont les périodes ω et ω' satisfassent à la condition

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m\omega + n\omega'}{m'\omega' + n'\omega'};$$

α et β sont les périodes de l'intégrale de première espèce de (1), m, n, m', n' des entiers.

La question qui nous occupe ne diffère donc pas du problème de la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques. Je renvoie, pour cette question, aux travaux bien connus de MM. Weierstrass, E. Picard, Poincaré, etc.

On peut décider algébriquement si la courbe (2) est une transformée d'ordre ν d'une courbe de genre 1 : j'entends par transformation d'ordre ν une transformation (3) telle qu'à tout point (y, z) de (1) correspondent ν points (y_1, z_1) de (2). Mais on ne sait pas, en général, déterminer une limite supérieure de ν.

Le genre de (2) est au moins égal à 1, puisque cette courbe possède une intégrale de première espèce. Si $p' = 1$, on peut ramener la courbe (2) à la forme

$$z_1 = \sqrt{(1-y_1^2)(1-k_1^2 y_1^2)},$$

et l'équation (5′) s'écrit

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \frac{\lambda\, dy_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(1-k_1^2 y_1^2)}}.$$

On retombe ainsi sur le problème de la transformation des fonctions elliptiques. Pour qu'on puisse passer rationnellement de (1) à (2), il faut et il suffit que k_1^2 vérifie une des équations modulaires relatives à k^2.

Ceci a lieu en particulier si $k = k_1$. Il vient, en faisant $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$,

$$\frac{\mu\, dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \frac{dy_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(1-k^2 y_1^2)}};$$

on doit avoir

$$\mu\omega = m\omega + n\omega,$$
$$\mu\omega' = m'\omega + n'\omega'.$$

Si l'on pose

$$\frac{\omega'}{\omega} = \alpha + i\beta,$$

on trouve

$$\mu = m + n\alpha + in\beta = n' + m'\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} - im'\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

ou bien

$$(a) \qquad n(\alpha^2+\beta^2)+m'=0,$$

$$(b) \qquad m+n\alpha-n'-\frac{m'\alpha}{\alpha^2+\beta^2}=0.$$

Dans le cas général, $\alpha^2+\beta^2$ est incommensurable; l'égalité (a) exige que m' et n soient nuls, et l'égalité (b) que $m=n'$. On a alors

$$\mu=m=n'$$

et on peut écrire

$$y=\operatorname{sn} t,$$
$$y_1=\operatorname{sn}(mz+C);$$

y_1 est donné en fonction de y et de $\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$ par les formules de multiplication et d'addition des fonctions elliptiques.

Dans le cas particulier où $(\alpha^2+\beta^2)$ est commensurable, il peut exister d'autres transformations de la courbe (1) en elle-même. On voit immédiatement que, si $(\alpha^2+\beta^2)$ et α sont deux nombres commensurables (autrement dit si α et β^2 sont commensurables), il existe une infinité de transformations rationnelles de la courbe (1) en elle-même; ces transformations correspondent aux valeurs des nombres m, n, m', n', μ obtenues de la manière suivante :

On pose

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{c}{d}, \qquad a=\frac{c'}{d'}$$

$\left(\frac{c}{d}, \frac{c'}{d'}\right.$ étant irréductibles$\left.\right)$, et on prend pour n un multiple quelconque des entiers d, d' $\left(\text{ou } d, \frac{d'}{2} \text{ si } d' \text{ est pair}\right)$. Appelons D le plus petit commun multiple de ces deux nombres; on a

$$n=\nu D=qd=q'd' \quad \left(\text{ou } q'\frac{d'}{2}\right);$$

on fait ensuite

$$m'=-qc$$

et

$$m=n'+2q'c' \quad (\text{ou } m=n'+q'c', \text{ si } d' \text{ est pair});$$

l'entier n' est choisi arbitrairement.

Les nouvelles transformations dépendent de deux entiers arbitraires ν et n' et se confondent avec les premières pour $\nu = 0$. Cette classe exceptionnelle de courbes de genre 1 correspond aux fonctions elliptiques qui admettent la multiplication complexe.

En résumé, *une courbe de genre* (1) *se laisse toujours transformer en elle-même rationnellement d'une infinité de manières. Ces transformations dépendent d'un paramètre* C *et d'un entier* μ *arbitraires. Quand le module* k^2 *de la courbe est un module singulier pour lequel les fonctions elliptiques admettent la multiplication complexe, ces transformations dépendent d'un second entier arbitraire.*

Si la transformation est birationnelle, $\lambda = 1$, et la transformation ne dépend plus, comme on sait, que de la constante arbitraire C. On obtient toutes les transformations rationnelles de la courbe (1) en elle-même, en opérant la substitution birationnelle la plus générale sur toutes les substitutions rationnelles obtenues en laissant constant le paramètre C.

Ce point établi, supposons qu'on ait trouvé une transformation rationnelle de la courbe (1) en une courbe (2) de genre p'. On peut en déduire une infinité d'autres qui dépendent d'un paramètre et d'un entier arbitraires, en se servant des transformations de (1) en elle-même. Dans certains cas, la substitution la plus générale qui transforme (1) en (2) renferme d'autres entiers arbitraires, mais elle ne saurait dépendre d'un second paramètre C′ continu.

Pour le voir, revenons à l'égalité

$$(5') \qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \frac{\lambda_1 P'_1(y_1, z_1) + \ldots + \lambda_{p'} P'_{p'}(y_1, z_1)}{F'_{z_1}} dy_1.$$

Les λ_i satisfont aux $2p'$ égalités

$$\begin{array}{l} \lambda_1 \omega_1^1 \ + \lambda_2 \omega_2^1 \ + \ldots + \lambda_{p'} \omega_{p'}^1 = m_1 \omega \ + n_1 \omega', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_1 \omega_1^{2p'} + \lambda_2 \omega_2^{2p'} + \ldots + \lambda_{p'} \omega_{p'}^{2p'} = m_{2p'} \omega + n_{2p'} \omega'. \end{array}$$

Dans ces équations les $\omega_i^1, \ldots, \omega_i^{2p'}$ désignent les $2p'$ périodes élémentaires de J'_i, les m_i, n_i des entiers.

Admettons qu'on ait trouvé un système de nombres m_i, n_i pour lesquels les équations précédentes soient compatibles. Ces équations ne sont pas indéterminées, sinon on pourrait se donner arbitrairement au moins un des λ, et les autres en dépendraient algébriquement, ce que nous savons absurde [1]. D'autre part, les λ_i une fois déterminés, l'équation (5′) définit une transformation (3) qui ne contient que la constante C. C'est donc le seul paramètre continu qui figure dans la transformation la plus générale.

Nous arrivons ainsi aux conclusions suivantes :

On ne peut passer rationnellement, en général, d'une courbe de genre 1 *à une courbe de genre p'. Une telle transformation, quand elle existe, dépend d'une seule constante et d'un entier ou de plusieurs entiers arbitraires (en nombre au plus égal à $2p'$).*

3. J'ai insisté sur le cas de $p = 1$ pour bien marquer les différences essentielles qui le distinguent du cas où p est quelconque, que nous allons maintenant étudier.

Tout d'abord, p' est au moins égal à p, car les p intégrales distinctes J_i de première espèce relatives à (1) se transforment en p intégrales distinctes de première espèce de la courbe (2).

Si μ désigne l'ordre de la transformation (3), il est même facile d'établir une relation entre μ, p et p'.

Soient en effet m et m' les degrés des courbes (1) et (2), et considérons toutes les courbes C, de degré $(m-3)$, qui passent par les points doubles A de la courbe (1). Ces courbes *adjointes* ont pour équation

$$A_1 P_1(y, z) + A_2 P_2(y, z) + \ldots + A_p P_p(y, z) = 0.$$

L'une quelconque de ces courbes se transforme par la substitution (3) en une courbe adjointe C′ de (2), ainsi qu'il résulte des théorèmes établis dans le premier paragraphe.

Une courbe C rencontre la courbe (1) en $(2p-2)$ points, distincts des points A. D'autre part, à chaque point (y_1, z_1) de (2) correspond

[1] Ceci nous montre que le déterminant des coefficients des λ est différent de zéro au moins pour un système de p' des équations précédentes : par exemple, pour celui des p' premières équations. [Autrement, d'ailleurs, il existerait des intégrales de première espèce J′ de la courbe (2) sans périodes.] Une fois connus les $2p'$ entiers $m_1, n_1, \ldots, m_{p'}, n_{p'}$, les λ sont donc déterminés. Il en résulte que la transformation (3) ne saurait dépendre de plus de $2p'$ entiers arbitraires (en dehors de la constante C).

un seul point (y, z) de (1), sauf pour des points (y', z') exceptionnels, et à chaque point (y, z) de (1) correspondent μ points (y_1, z_1), sauf pour des points (y', z') exceptionnels. Choisissons donc une courbe C qui ne passe par aucun de ces points (y', z') : aux $(2p-2)$ points communs à C et à (1) correspondent $(2p-2)\mu$ points communs à C′ et à (2). Ces points sont distincts; autrement, à un point (y_1, z_1) correspondraient plusieurs points (y, z); il en résulte qu'on doit avoir

$$(2p-2)\mu = 2p'-2, \qquad \text{ou bien} \qquad \mu = \frac{p'-1}{p-1}.$$

Ceci nous montre, comme nous le savions déjà, que $p = p'$ si $\mu = 1$, mais aussi que la réciproque est vraie : *toute substitution rationnelle qui transforme une courbe en une courbe de même genre est nécessairement birationnelle* (¹).

De plus, si $(p'-1)$ est un nombre premier, la courbe (2) ne saurait être la transformée rationnelle que d'une courbe de genre 2. Si $(p'-1)$ admet des diviseurs, $p-1$ doit être un de ces diviseurs. Enfin, μ ne peut dépasser $p'-1$.

Nous allons démontrer maintenant qu'il n'existe qu'un nombre fini de substitutions (3) permettant de passer de la courbe (1) à la courbe (2), quand p est supérieur à 1.

Nous savons en effet qu'une telle substitution vérifie l'égalité

$$\frac{P_1(y, z)}{P_2(y, z)} = \frac{\Sigma\lambda_i P'_i(y_1, z_1)}{\Sigma\mu_i P'_i(y_1, z_1)}.$$

Cette équation, jointe à l'équation (1), détermine algébriquement y et z en fonction de y_1, z_1. Par exemple, si on élimine z, il reste une équation en y, y_1, z_1. Quand on exprime qu'une racine de cette équation est fonction rationnelle du point y_1, z_1 de (2)

$$y = a_0(y_1) + a_1 z_1 + \ldots + a_{n'} z_1^{n'}$$

et qu'il en est de même de z, on obtient un certain nombre de conditions algébriques entre les λ_i, μ_i. Si ces relations sont incompatibles, il n'existe pas de substitution (3) répondant à la question. Si elles

(¹) Cette proposition a déjà été établie par Weber (*Journal de Crelle*, 1879).

sont compatibles et déterminées, il existe un nombre fini de telles transformations. D'autre part, elles ne peuvent être indéterminées; autrement, une infinité de substitutions, dépendant algébriquement d'un paramètre, transformeraient (1) en (2).

La démonstration, ainsi présentée, ne comporte pas d'exception. Nous allons toutefois en indiquer une seconde, qui met en évidence quelques particularités intéressantes.

Parmi les courbes C adjointes à (1), choisissons-en deux qui aient, sur (1), un point commun et un seul. La chose est toujours possible quand (1) n'est pas hyperelliptique. C'est là un fait bien connu dont on se rend compte aisément ainsi :

Quand il n'existe pas deux courbes C répondant à la courbe imposée, c'est que toutes les courbes C passant par un point M_1 de (1) ont avec cette courbe au moins un second point commun N_1 (en dehors des points multiples A). Par suite, toutes les courbes C qui ont un point fixe M_1 sur la courbe (1) ont, par le fait même, un second point fixe N_1 sur cette courbe.

Assujettissons les courbes C à passer par $(p-2)$ points fixes M_1, $M_2, \ldots, M_{p-1}$, pris sur (1) en dehors des points A. L'équation du faisceau de courbes ainsi obtenu est de la forme

$$R + tS = 0,$$

et ces courbes ont sur (1) $(p-2)$ autres points fixes, $N_1, N_2, \ldots, N_{p-2}$. Quand t varie, le nombre des points variables de l'intersection de (1) et de (C) est

$$m(m-3) - [(m-1)(m-2) - 2p + 2p - 4] = 2.$$

Les coordonnées de ces deux points d'intersection sont données par des équations de la forme

$$y = g(t) + h(t)\sqrt{R(t)},$$
$$z = g_1(t) + h_1(t)\sqrt{R(t)},$$

avec cette condition

$$t = -\frac{R(y,z)}{S(y,z)},$$

c'est-à-dire que la courbe (1) se ramène, par une transformation birationnelle, à la forme hyperelliptique.

Inversement, quand (1) est de l'espèce hyperelliptique, deux courbes C n'ont jamais un point commun avec (1) sans en avoir un second.

Il suffit de vérifier le fait, en supposant l'équation de (1) ramenée à la forme

$$T = \sqrt{R(t)};$$

les courbes C sont alors décomposables en droites

$$t = t_0,$$

et si l'une passe par le point (t_0, T_0) de (1), elle passe aussi par le point $(t_0, -T_0)$.

Supposons donc, en premier lieu, que la courbe (1) ne rentre pas dans cette classe exceptionnelle, et soient

$$H(y, z) = 0, \qquad K(y, z) = 0$$

les équations de deux courbes C qui ont sur la courbe (1) un point commun et un seul M_0 ou (y_0, z_0) (en dehors des A). Ces deux équations peuvent s'écrire

$$P_2(y, z) - P_1(y, z) = 0,$$
$$P_3(y, z) - P_1(y, z) = 0,$$

P_3, P_2, P_1 étant linéairement indépendants. Comme nous l'avons démontré, la substitution (3) vérifie les égalités

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{P_2(y, z)}{P_1(y, z)} &= \frac{\mu_1 P'_1(y_1, z_1) + \ldots + \mu_{p'}(y_1, z_1)}{\lambda_1 P'_1(y_1, z_1) + \ldots + \lambda_{p'}(y_1, z_1)}, \\ \frac{P_3(y, z)}{P_1(y, z)} &= \frac{\nu_1 P'_1(y_1, z_1) + \ldots + \nu_{p'}(y_1, z_1)}{\lambda_1 P'_1(y_1, z_1) + \ldots + \lambda_{p'}(y_1, z_1)}, \end{aligned} \right.$$

où les λ_i, μ_i, ν_i sont des constantes convenablement choisies.

Pour toutes valeurs des y_1, z_1 vérifiant l'équation (2), ces deux équations (8) doivent être compatibles avec l'équation (1). Si nous exprimons qu'il en est ainsi, nous formons un certain nombre de conditions algébriques auxquelles doivent satisfaire les λ, μ, ν.

Pour tout système λ, μ, ν [1] répondant à ces conditions, les équa-

---

[1] Nous supposons écartées les solutions où

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_j} = \frac{\mu_i}{\mu_j} = \frac{\nu_i}{\nu_j},$$

et aussi celles où les λ, μ, ν sont nuls.

tions (8) et (1) ont au moins une solution (y, z) commune. Ce point y, z varie avec y_1, z_1, sinon on aurait constamment

$$\frac{\Sigma \mu_i P'_i(y_1, z_1)}{\Sigma \lambda_i P'_i(y_1, z_1)} = \frac{P(y_0, z_0)}{Q(y_0, z_0)} = 1,$$

et les polynômes P'_i vérifieraient une relation linéaire et homogène dont les coefficients (constants) ne seraient pas tous nuls.

D'autre part, les équations (8) et (1) ne peuvent avoir, pour un point quelconque de (2) (y_1, z_1), plus d'une solution (y, z) commune, puisqu'elles n'ont qu'une solution commune pour les valeurs (y_1, z_1) qui correspondent à (y_0, z_0).

Les valeurs (y, z) de cette solution commune s'expriment donc rationnellement en fonction de y_1, z_1.

J'ajoute que deux systèmes distincts de solutions λ, μ, ν correspondent à deux transformations (3) distinctes. En disant que les deux systèmes (λ, μ, ν), (λ', μ', ν') sont distincts, j'entends que les λ, μ, ν ne sont pas respectivement proportionnels aux λ', μ', ν'.

En effet, si les deux substitutions (3) coïncidaient, on aurait

$$\int \frac{P_1(y, z)\,dz}{f'(z)} = \frac{C\Sigma\lambda_i P'_i(y_1, z_1)\,dz_1}{F'_{z_1}} = \frac{C'\Sigma\lambda'_i P'_i(y_1, z_1)\,dz_1}{F_{z_1}},$$

identité qui exige que

$$C\lambda_i = C'\lambda'_i.$$

On verrait de même que

$$C\mu_i = C'\mu'_i,$$
$$C\nu_i = C'\nu'_i.$$

Donc à deux systèmes λ, μ, ν distincts correspondent deux substitutions (3) distinctes.

Il en résulte que les relations qui lient les rapports des λ, μ, ν sont ou incompatibles ou déterminées. Ces relations, qui sont algébriques, ne sauraient admettre qu'un nombre fini de solutions : il n'existe donc qu'un nombre fini de substitutions (3) transformant (1) en (2), et la méthode précédente permet de les calculer algébriquement.

4. On peut donner plus de symétrie au raisonnement employé en

introduisant la courbe gauche à laquelle M. Nœther a donné le nom de *courbe normale*.

Regardons les p quantités

$$P_1(y, z), \quad P_2(y, z), \quad \ldots, \quad P_p(y, z)$$

comme les p coordonnées homogènes d'un certain point N dans l'espace à $(p-1)$ dimensions. Quand le point (y, z) décrit la courbe (1), le point N décrit une courbe gauche Γ dans l'espace à $(p-1)$ dimensions. Cette courbe Γ est la *courbe normale* attachée à la courbe (1).

A chaque point (y, z) de (1) correspond un point de Γ et un seul.

Réciproquement, si la courbe (1) n'est pas hyperelliptique, à chaque point de Γ correspond un point de (1) et un seul.

En effet, soient

$$\alpha_1 = \frac{P_2}{P_1}, \qquad \alpha_2 = \frac{P_3}{P_1}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{p-1} = \frac{P_p}{P_1}$$

les rapports des coordonnées homogènes d'un point de Γ. Les courbes C

$$\begin{aligned} P_2 - \alpha_1 P_1 \quad &= 0, \\ P_3 - \alpha_2 P_1 \quad &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ P_p - \alpha_{p-1} P_1 &= 0 \end{aligned}$$

ont (en dehors des points A) un point commun M situé sur (1) et *un seul*; autrement, toutes les courbes C qui ont un point commun sur (1) en auraient par le fait même un second, et la courbe serait hyperelliptique.

D'après cela, il y a une correspondance birationnelle entre les courbes (1) et Γ.

Remarquons que la courbe Γ n'est définie qu'à une transformation homographique près.

Si l'on élimine (y, z) entre les égalités qui expriment les p coordonnées P_i, on obtient $(p-2)$ relations homogènes entre ces coordonnées. Ces relations, que nous appellerons les relations (α), sont les équations de Γ.

On peut de même attacher à la courbe (2) une courbe gauche Γ' de l'espace à $(p'-1)$ dimensions, définies par $(p'-2)$ relations homogènes entre les P_i, relations que nous désignerons par la lettre (β).

Admettons qu'il existe une substitution (3) transformant (1) en (2). Les P_i deviennent des fonctions de y_1, z_1, qui continuent à vérifier les relations (α); d'autre part, on a

$$\frac{P_2(y,z)}{P_1(y,z)}=\frac{\mu_1 P'_1(y_1,z_1)+\mu_2 P'_2(y_1,z_1)+\ldots+\mu_{p'}P'_{p'}(y_1,z_1)}{\lambda_1 P'_1(y_1,z_1)+\ldots+\lambda_{p'}P'_{p'}(y_1,z_1)},$$

$$\frac{P_3(y,z)}{P_1(y,z)}=\frac{\nu_1 P'_1(y_1,z_1)+\ldots+\nu_{p'}P'_{p'}(y_1,z_1)}{\lambda_1 P'_1(y_1,z_1)+\ldots+\lambda_{p'}P'_{p'}(y_1,z_1)}.$$

On voit donc que les coordonnées d'un point de la courbe Γ s'expriment homographiquement en fonction des coordonnées d'un point de Γ'.

Analytiquement, on voit qu'en remplaçant dans les équations (α) les P_i par des fonctions linéaires et homogènes des P'_j (les coefficients étant des constantes convenablement choisies), les $(p-2)$ relations entre les P'_j ainsi formées doivent être des conséquences des relations (β). Ce fait s'exprimera par des relations algébriques entre les λ, μ, ν.

Inversement, quand les points de la courbe Γ correspondent homographiquement aux points de Γ', par des formules telles que

$$P_1=\lambda_1 P'_1+\lambda_2 P'_2+\ldots+\lambda_{p'}P'_{p'},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

cette correspondance homographique définit une substitution rationnelle transformant la courbe (1) en la courbe (2).

Dans ce cas, en effet, à chaque point de (2) correspond un et seul point de (Γ'), à chaque point de Γ' un et seul point de Γ, enfin à chaque point de Γ un et seul point de (1). Chaque point (y,z) de (1) est donc défini rationnellement en fonction d'un point (y_1,z_1) de (2). Le raisonnement n'excepte pas le cas où la courbe (2) serait de l'espèce hyperelliptique.

Quand la substitution (3) est birationnelle, $p=p'$, et la correspondance homographique entre les deux courbes (Γ) et (Γ') est réciproque.

Inversement, si $p=p'$, la substitution (3) est nécessairement birationnelle, car la correspondance entre Γ et Γ' est réciproque : à un point (y, z) de (1) correspond un point de Γ, à ce point un point de Γ', à ce dernier enfin un point (y_1, z_1) de (2), si cette courbe (2) n'est pas hyperelliptique.

Ce cas, où (2) serait hyperelliptique, ne peut d'ailleurs se présenter. Pour le voir, ramenons l'équation (2) à la forme

$$z_1^2 = R(y_1).$$

Les polynômes P'_i ne renfermant pas z_1, les rapports $\frac{P_i}{P_1}$ s'exprimeraient rationnellement en y_1, et comme les coordonnées (y, z) d'un point de (1) sont des fonctions rationnelles de $\frac{P_i}{P_1}$, elles s'exprimeraient ellesmêmes rationnellement en fonction d'un paramètre. La courbe (1) serait donc de genre zéro, tandis que p est plus grand que 1 par hypothèse.

Nous sommes conduits ainsi aux propositions suivantes :

On ne peut passer rationnellement d'une courbe (1) *de genre supérieur à* 1 *à une courbe hyperelliptique* (2), *si la courbe* (1) *n'est elle-même hyperelliptique.*

Toute transformation rationnelle qui permet de passer d'une courbe (1) *de genre supérieur à* 1 *et non hyperelliptique à une autre courbe* (2) *de même genre p est nécessairement birationnelle.*

Ce théorème, nous l'avons démontré plus haut dans tous les cas.

Pour qu'il existe une substitution rationnelle qui permette de passer d'une courbe (1) *non hyperelliptique à une autre courbe* (2) *du même genre p, il faut et il suffit que les deux courbes* (1) *et* (2) *admettent la même courbe normale.*

Remarquons en passant que la méthode précédente fournit un moyen de calculer les modules d'une courbe algébrique ou d'une surface de Riemann. Ces modules ne sont autre chose que les invariants de la courbe Γ relatifs à la substitution homographique la plus générale.

Observons, au point de vue de la marche du calcul, qu'on peut choisir P_1, P_2, P_3, liés par une des relations (α) :

$$H(P_1, P_2, P_3) = 0,$$

de telle façon que $\frac{P_i}{P_1}$ s'exprime rationnellement en fonction de $\frac{P_2}{P_1}, \frac{P_3}{P_1}$. Cette courbe $H=0$, de degré $p+1$, introduite par Clebsch, correspond birationnellement à (1) et son équation se calcule aisément. Si l'on pose

$$\frac{P_2}{P_1}=Y, \qquad \frac{P_3}{P_1}=Z,$$

pour que (1) corresponde rationnellement à (2), il faut et il suffit qu'on puisse disposer des constantes λ, μ, ν, de telle façon qu'en faisant

$$Y=\frac{\Sigma\mu_i P'_i(y_1,z_1)}{\Sigma\lambda_i P'_i(y_1,z_1)}, \qquad Z=\frac{\Sigma\nu_i P'_i(y_1,z_1)}{\Sigma\lambda_i P'_i(y_1,z_1)}$$

dans l'équation

$$H_1(Y,Z)=0,$$

l'équation ainsi obtenue soit une conséquence de

$$F(y_1,z_1)=0. \tag{2}$$

5. Au lieu de faire usage de la courbe normale de M. Nœther, on pouvait avoir recours à certaines considérations indiquées par M. Poincaré dans le Mémoire déjà cité ([1]).

Écrivons l'équation des courbes adjointes C

$$A_1P_1(y,z)+A_2P_2(y,z)+\ldots+A_pP_p(y,z)=0$$

et de même, l'équation des courbes adjointes C′

$$B_1P'_1(y_1,z_1)+\ldots+B_{p'}P_{p'}(y_1,z_1)=0.$$

Soient

$$\Theta(A_1,A_2,\ldots,A_p)=0,$$
$$\Theta_1(B_1,B_2,\ldots,B_{p'})=0$$

les deux relations algébriques et homogènes qui expriment, la première, que la courbe C est tangente à (1), la seconde, que C′ est tangente à (2).

Désignons par (y,z) les coordonnées du point de contact de C et

([1]) H. Poincaré, *Acta mathematica*, t. VII.

de (1). Nous aurons

$$y = R(A_1, A_2, \ldots, A_p),$$
$$z = R_1(A_1, A_2, \ldots, A_p),$$

R et R_1 étant deux fonctions rationnelles. Toutefois, cette dernière proposition cesse d'être exacte si les courbes C ne peuvent avoir un point de contact avec (1) sans en avoir plusieurs. C'est précisément ce qui arrive pour les courbes hyperelliptiques.

Supposons en effet que la courbe (1) soit hyperelliptique et ramenée à la forme

$$z^2 = R(y).$$

Les courbes C ont alors pour équation

$$A_1 + A_2 y + \ldots + A_p y^{p-1} = \rho.$$

La relation $\Theta = 0$ exprime alors que cette équation a une racine double en y. A tout système de $A_1, A_2, \ldots, A_p$, vérifiant cette condition correspond une seule valeur de y, mais deux valeurs de z :

$$z = \pm z_0.$$

Inversement, si toutes les courbes C tangentes à la courbe (1) ont avec cette courbe plusieurs points de contact, la courbe est hyperelliptique.

Soit en effet M un point de contact de (1) et de C. Par hypothèse, toutes les courbes C tangentes en M à la courbe (1) ont avec cette courbe au moins un second point de contact N.

Je dis en premier lieu que ce point N est le même pour toutes les courbes C tangentes à (1) en M.

Pour le voir, désignons par (y_0, z_0) les coordonnées de M, par (y, z) celles de N.

Le point (y_0, z_0) étant un point de contact de (1) et de C, ses coordonnées satisfont aux égalités

$$A_1 P_1(y_0, z_0) + \ldots + A_p P_p(y_0, z_0) = 0,$$
$$A_1 \frac{dP_1(y_0, z_0)}{dy} + \ldots + A_p \frac{dP_p(y_0, z_0)}{dy} = 0.$$

Le symbole

$$\frac{d\mathrm{P}_i(y_0, z_0)}{dx}$$

représente, dans cette dernière équation, la valeur que prend la fonction

$$\frac{\partial \mathrm{P}_i(y,z)}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{P}_i(y,z)}{\partial z}\,\frac{\dfrac{\partial f(y,z)}{\partial y}}{\dfrac{\partial f(y,z)}{\partial z}}$$

quand on y fait $y = y_0$, $z = z_0$.

Par hypothèse, le point (y, z) doit vérifier, par le fait même, les relations analogues

$$\sum \mathrm{A}_i \mathrm{P}_i(y,z) \quad = 0.$$

$$\sum \mathrm{A}_i \frac{d\mathrm{P}_i(y,z)}{dy} = 0,$$

Ces égalités doivent donc être des conséquences des précédentes, quels que soient les A_i, ce qui exige qu'on ait

$$(h) \qquad \mathrm{P}_i(y,z) = \lambda \mathrm{P}_i(y_0, z_0) + \mu \frac{d\mathrm{P}_i(y_0, z_0)}{dy}$$

et de même

$$\frac{d\mathrm{P}_i(y,z)}{dy} = \lambda' \mathrm{P}_i(y_0, z_0) + \mu' \frac{d\mathrm{P}_i(y_0, z_0)}{dy}$$

pour toutes les valeurs de i, $i = 1, 2, \ldots, p$.

On en déduit aussitôt

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\mathrm{P}_1(y,z)\dfrac{d\mathrm{P}_2(y_0,z_0)}{dy} - \mathrm{P}_2(y,z)\dfrac{d\mathrm{P}_1(y_0,z_0)}{dy}}{\mathrm{P}_1(y_0,z_0)\dfrac{d\mathrm{P}_2(y_0,z_0)}{dy} - \mathrm{P}_2(y_0,z_0)\dfrac{d\mathrm{P}_1(y_0,z_0)}{dy}} \\
&= \frac{\mathrm{P}_2(y,z)\dfrac{d\mathrm{P}_3(y_0,z_0)}{dy} - \mathrm{P}_3(y,z)\dfrac{d\mathrm{P}_2(y_0,z_0)}{dy}}{\mathrm{P}_2(y_0,z_0)\dfrac{d\mathrm{P}_3(y_0,z_0)}{dy} - \mathrm{P}_3(y_0,z_0)\dfrac{d\mathrm{P}_2(y_0,z_0)}{dy}} \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les quantités y_0, z_0 étant données, ces équations sont de la forme

$$\mathrm{P}_1(y,z) + \alpha \mathrm{P}_2(y,z) + \beta \mathrm{P}_3(y,z) = 0,$$

α, β désignant des constantes. Une telle relation ne peut jamais se réduire à une identité. Elle détermine donc sur la courbe (1) des points particuliers N qui correspondent au point M.

Pour rappeler ce fait, désignons par (y'_0, z'_0) les coordonnées d'un de ces points N.

Revenons alors aux égalités (h). Il est facile de voir que, dans ces égalités, μ est nul. Sinon l'égalité

$$\sum A_i \frac{dP_i(y_0, z_0)}{dy} = 0$$

résulterait des deux égalités

$$\sum A_i P_i(y_0, z_0) = 0,$$

$$\sum A_i P_i(y'_0, z'_0) = 0,$$

c'est-à-dire que toute courbe C passant par les deux points M et N serait tangente à la courbe (1) au point M.

Or cette supposition est inadmissible, comme on peut s'en rendre compte de la manière suivante : considérons toutes les courbes C qui passent par le point M et coupent la courbe (1) sous un angle donné a; elles rencontrent la courbe (1) en un certain nombre de points variables Q_i, qui parcourent la courbe (1) et coïncident, pour certaines courbes C, avec N. Ces courbes passent par M et N sans être tangentes à (1) au point M [1].

Donc μ est nul, et l'on a

$$P_i(y_0, z_0) = \lambda P_i(y'_0, z'_0),$$

c'est-à-dire que l'équation

$$\sum A_i P_i(y'_0, z'_0)$$

est une conséquence de l'équation

$$\sum A_i P_i(y_0, z_0);$$

---

[1] A la vérité, ce raisonnement suppose $p > 3$. Si $p = 3$, on ramène, par une transformation birationnelle, l'équation (1) à être du quatrième degré, et le théorème que nous voulons démontrer apparaît immédiatement.

toute courbe C qui passe par M passe par N. La courbe (1) est de l'espèce hyperelliptique.

Si donc nous laissons de côté la classe des courbes (1) hyperelliptiques, les coordonnées y, z des points de contact d'une courbe C avec (1) s'expriment rationnellement en fonction des A_i

$$y = R\ (A_1, A_2, \ldots, A_p),$$
$$y = R_1(A_1)\, A_2, \ldots, A_p).$$

Les quantités A_i sont assujetties à la seule relation

$$\Theta(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0.$$

Cela posé, admettons qu'il existe une substitution rationnelle (3) permettant de passer de la courbe (1) à la courbe (2).

Par cette substitution, les courbes C, définies par l'équation

$$A_1 P_1(y_1, z_1) + \ldots + A_p P_p(y, z) = 0,$$

se transforment en un faisceau de courbes C′ dépendant linéairement de p paramètres homogènes

$$A'_1 P'_1(y_1, z_1) + \ldots + A'_{p'} P'_{p'}(y_1, z_1) = 0.$$

Dans cette équation, les A'_j sont de la forme suivante :

$$(k) \qquad A'_j = \lambda_j^1 A_1 + \lambda_j^2 A_2 + \ldots + \lambda_j^p A_p,$$

les λ_j^i désignant des constantes.

Si les courbes C sont tangentes à (1), les courbes C′ correspondantes sont tangentes à (2). Ce fait géométrique équivaut à cet autre fait analytique : si les A_i vérifient la relation

$$\Theta(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0,$$

les quantités A'_j vérifient la relation

$$\Theta_1(A'_1, A'_2, \ldots, A'_{p'}) = 0.$$

Ainsi, s'il existe une substitution rationnelle (3) qui transforme (1) en (2), il existe une transformation homographique de la forme (k), qui permet de passer de la relation

$$\Theta(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0$$

à la relation

$$\Theta_1(A'_1, A'_2, \ldots, A'_{p'}) = 0.$$

La réciproque est vraie. Pour l'énoncer sous une forme géométrique, regardons les $A_1, A_2, \ldots, A_p$ comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à $(p-1)$ dimensions. L'équation homogène

$$\Theta(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0$$

représente une surface dans cet espace. De même l'équation

$$\Theta_1(A'_1, A'_2, \ldots, A'_{p'}) = 0$$

représente une surface dans l'espace à $(p'-1)$ dimensions. Si la surface $\Theta = 0$ correspond homographiquement à la surface $\Theta_1 = 0$ [par des formules telles que (k)], cette correspondance définit une transformation rationnelle de (1) en (2).

En effet, choisissons parmi les courbes C un faisceau quelconque dépendant de deux paramètres et assujetti à l'unique condition de renfermer une courbe ayant avec la courbe (1) un point de contact et un seul. Soit

$$(l) \qquad A_1 P_1(y, z) + A_2 P_2(y, z) + A_3 P_3(y, z) = 0$$

l'équation de ce faisceau.

A ces courbes C correspondent par la transformation (3) des courbes C′ dépendant de deux paramètres et dont l'équation s'écrit

$$(l') \qquad A_1 Q_1(y_1, z_1) + A_2 Q_2(y_1, z_1) + A_3 Q_3(y_1, z_1) = 0$$

avec

$$Q_1(y_1, z_1) = \sum_{i=1}^{i=p'} \alpha_i P'_i(y_1, z_1),$$

$$Q_2(y_1, z_1) = \sum_{i=1}^{i=p'} \beta_i P'_i(y_1, z_1),$$

$$Q_3(y_1, z_1) = \sum_{i=1}^{i=p'} \gamma_i P'_i(y_1, z_1),$$

les α, β, γ étant des constantes qui dépendent des λ^i_j.

Si l'on se donne un point de contact (y_1, z_1) de la courbe (2) avec la courbe (l'), la courbe (l') est déterminée, et les rapports $\frac{A_2}{A_1}$, $\frac{A_3}{A_1}$ sont donnés rationnellement en fonction de (y_1, z_1) par les équations

$$A_1 Q_1(y_1, z_1) + A_2 Q_2(y_1, z_1) + A_3 Q_3(y_1, z_1) = 0;$$
$$A_1 \frac{dQ_1(y_1, z_1)}{dy_1} + A_2 \frac{dQ_2(y_1, z_1)}{dy_1} + A_3 \frac{dQ_3(y_1, z_1)}{dy_1} = 0.$$

D'autre part, la courbe (l) correspondante est tangente à la courbe (1) en un point (y, z), car A_1, A_2, A_3 vérifient la relation

$$\Theta(A_1, A_2, A_3) = 0;$$

les coordonnées (y, z) du point de contact s'expriment rationnellement en fonction des rapports $\frac{A_2}{A_1}$, $\frac{A_3}{A_2}$, par suite, en fonction de (y_1, z_1).

Il suffira donc d'examiner si l'on peut passer de la surface $\Theta_1 = 0$ à la surface $\Theta = 0$ par une transformation homographique (k). Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les rapports des λ_j^i vérifient certaines relations algébriques, qui sont ou incompatibles ou déterminées.

Quand les deux courbes (1) et (2) sont de même genre, la correspondance homographique entre les deux surfaces $\Theta = 0$ et $\Theta_1 = 0$ de l'espace à $(p - 1)$ dimensions est réciproque. Les relations (k) définissent alors les A_i en fonction linéaire et homogène des A'_j, et le raisonnement précédent montre que la transformation rationnelle de la courbe (1) en la courbe (2) est nécessairement birationnelle.

Ce raisonnement serait toutefois en défaut si la courbe (2) était hyperelliptique; mais nous avons montré que ce cas ne peut se présenter. Voici, d'ailleurs, comment on le verrait directement :

Supposons que (2) soit hyperelliptique, et ramenons-la à la forme

$$z_1^2 = R(y_1).$$

Toutes les courbes C' qui passent par le point (y_1, z_1) passent par le point $(y_1, -z_1)$; par suite, toutes les courbes C qui passent par le point (y, z) correspondant à (y_1, z_1) passent par le point (y', z') correspondant à $(y_1, -z_1)$. Ceci montre que la courbe (1) est hyperelliptique, ou bien que les points (y, z), (y', z') coïncident. Mais, dans cette dernière hypothèse, y et z s'exprimeraient rationnellement en fonction de y_1, et la courbe (1) serait de genre o, ce qui est absurde. La courbe (1) est donc hyperelliptique.

Nous retrouvons ainsi, par cette seconde méthode, tous les résultats que nous avions obtenus en faisant usage de la courbe normale de M. Nœther.

6. Il nous reste à examiner avec quelque détail le cas où la courbe (1) est hyperelliptique.

Ramenons d'abord l'équation (1) à la forme

$$z^2 = R(y).$$

Pour une telle courbe,

$$P_1 = 1, \qquad P_2 = y, \qquad P_3 = y^2, \qquad \ldots, \qquad P_p = y^{p-1};$$

on doit donc avoir

$$\frac{P_2}{P_1} = y = \sum_{i=1}^{i=p'} \frac{\mu_i P'_i(y_1, z_1)}{\lambda_i P_i(y_1, z_1)}$$

et, par suite,

$$z = \sqrt{R(y)} = \sqrt{R_1(y_1, z_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \mu_i, \ldots)},$$

R_1 désignant une fonction rationnelle de y_1, z_1. Si l'on exprime, d'autre part, que $\sqrt{R_1}$ doit être une fonction rationnelle du point (y_1, z_1) de (1), on obtient certaines relations algébriques entre les rapports des λ, μ, relations qui sont incompatibles ou déterminées.

Examinons, en particulier, le cas où $p = p'$. En premier lieu, la courbe (2) est alors hyperelliptique. En effet, toutes les courbes C qui passent par le point (y_0, z_0) de (1) passent aussi par le point $(y_0, -z_0)$. Les courbes C' correspondant aux courbes C (lesquelles comprennent toutes les courbes C', puisque $p = p'$) ne peuvent donc avoir un point commun (y_1, z_1) sur (2) sans en avoir un second (y'_1, z'_1) : ces points (y_1, z_1), (y'_1, z'_1) sont les correspondants de (y_0, z_0), $(y_0, -z_0)$, et ne peuvent se confondre; car autrement, au même point (y_1, z_1) de (2) correspondraient deux points de (1). La courbe (2) est donc hyperelliptique.

J'ajoute que la correspondance entre les deux courbes est birationnelle. Soit, en effet,

$$z_1 = \sqrt{\rho(y_1)}$$

l'équation de (2). On doit avoir

$$y = \frac{Q(y_1)}{P(y_1)},$$

et aussi

$$y^{p-1} = \frac{S(y_1)}{P(y_1)},$$

P, Q, S désignant trois polynômes de degré $(p-1)$ au plus en y_1.

Ces égalités ne sauraient être compatibles que si l'on a

$$\frac{Q(y_1)}{P(y_1)} = \frac{\mu y_1 + \mu_1}{\lambda y_1 + \lambda_1},$$

λ, λ_1, μ, μ_1 étant quatre constantes. Donc

$$y = \frac{\mu y_1 + \mu_1}{\lambda y_1 + \lambda_1};$$

d'autre part,

$$z = \alpha(y_1) + z_1 \beta(y_1),$$

α et β étant rationnels. Ces égalités nous montrent que y_1 et z_1 s'expriment rationnellement en y, z. La correspondance entre (1) et (2) est donc birationnelle. Nous vérifions ainsi, dans tous les cas, le théorème que nous avions établi en général au début de cette étude : quand $p = p'$ $(p > 1)$, les transformations (3) sont birationnelles.

7. Les conclusions auxquelles nous arrivons sont les suivantes :

Étant données deux courbes algébriques (1) *et* (2) *de genre p et p', si p est supérieur à* 1, *il n'existe pas, en général, de substitutions rationnelles* (3) *permettant de passer de la courbe* (1) *à la courbe* (2). *De telles substitutions, quand elles existent, ne sont jamais qu'en nombre limité, et se calculent à l'aide d'opérations algébriques.*

Le genre p' de (2) *est inférieur ou égal au genre p de* (1). *Si $p = p'$, toute substitution rationnelle qui transforme* (1) *en* (2) *est birationnelle.*

Plus généralement, μ désignant l'ordre de la substitution rationnelle (3), *on a*

$$\mu = \frac{p'-1}{p-1}.$$

Les courbes de genre 0 *et* 1 *sont les seules qui se laissent transformer en courbes du même genre par des substitutions simplement rationnelles.*

Quand la courbe (2) *est hyperelliptique, toute courbe* (1) *de genre plus grand que* 1 *dont elle est la transformée rationnelle est hyperelliptique.*

Dans ce qui précède, nous avons supposé qu'on se donnait la courbe (1) de genre p qu'il s'agissait de transformer rationnellement en la courbe (2), de genre p'.

Plus généralement, on peut chercher à résoudre le problème suivant :

Étant donnée une courbe (2) *de genre p', reconnaître si elle est la transformée rationnelle d'une courbe de genre p.*

Quand $p = 1$, le problème, comme nous l'avons dit, se ramène à reconnaître si une intégrale de première espèce de la courbe (2) n'a que deux périodes.

Quand p est supérieur à 1, la question se résout algébriquement. Tout d'abord, si $p = p'$, la transformation est nécessairement birationnelle; toutes les courbes de la même *classe* que (2) sont des transformées birationnelles de cette courbe et répondent à la question. Mais nous ne regardons pas comme distinctes, dans ce qui va suivre, deux courbes qui correspondent à la même surface de Riemann. Nous cherchons seulement, parmi les courbes (1) qui se transforment rationnellement en la courbe (2), un type de chaque classe. Toutes les courbes appartenant à la même classe jouiront de la même propriété.

D'après un théorème déjà rappelé de Clebsch, toute courbe de genre p (non hyperelliptique) peut être ramenée au degré $p+1$ par une transformation birationnelle. Prenons donc comme courbe (1) la courbe de degré $(p+1)$ la plus générale à $\left[\frac{p(p-1)}{2} - p\right]$ points doubles. Son équation dépendra encore d'un certain nombre d'indéterminées α_1, α_2, ..., α_k. Donnons à ces constantes des valeurs quelconques et écrivons les équations nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une correspondance rationnelle de (2) à (1). Nous obtenons ainsi certaines relations algébriques auxquelles doivent satisfaire les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Quand ces relations sont compatibles, en remplaçant les α_i par un système quelconque de solutions, on forme l'équation d'une courbe (1) dont (2) se déduit rationnellement.

Pour chercher les courbes (1) hyperelliptiques, on procède de la même manière, en prenant leur équation sous la forme

$$y^2 = y(y-1)(y-k_1)(y-k_2)\ldots(y-k_{(2p-1)}).$$

En donnant à p les valeurs $1+\frac{p'-1}{\mu}$ (μ étant un diviseur de $p'-1$), on détermine algébriquement toutes les courbes du genre p plus grand que 1, dont (2) est la transformée rationnelle, ou plutôt des types de toutes les classes de ces courbes.

Parmi ces courbes, en peut-il exister une infinité qui soient distinctes? autrement dit, ces courbes peuvent-elles appartenir à une infinité de classes?

Pour nous en rendre compte, assujettissons dans l'équation (1) les constantes α_i à des conditions arbitraires choisies de façon que cette équation ne dépende plus que de $(3p-3)$ indéterminées β, permettant de donner aux $(3p-3)$ modules de (1) des valeurs quelconques. Ceci est toujours possible : ces constantes forment alors elles-mêmes un système de modules de (1).

Raisonnons maintenant sur cette équation (1) comme plus haut. Les β_i doivent satisfaire à des conditions algébriques qui sont ou incompatibles, ou déterminées, ou indéterminées. Dans le premier cas, il n'existe pas de courbes de genre 1 répondant à la question; dans le second, il en existe un nombre limité et, dans le troisième, une infinité dont les modules dépendent algébriquement de paramètres arbitraires.

Je vais montrer que ce dernier cas ne saurait se présenter.

Soit, en effet,

$$f(y, z, t, u, \ldots) = 0 \tag{1}$$

l'équation de la courbe (1) dont les modules dépendent de t, u, ... algébriquement. Faisons varier seulement le paramètre t.

Par hypothèse, une substitution (3) permet de passer de (1) à la courbe donnée (2) et vérifie, par suite, les égalités

$$(a)\qquad \int \frac{P_i(y,z)}{F'_z}dz = \lambda_1^i \int \frac{P'_1(y_1,z_1)\,dz}{F'_{z_1}} + \ldots + \lambda_{p'}^i \int \frac{P'_{p'}(y_1,z_1)\,dz_1}{F'_{z_1}}.$$

Si les λ_i ne dépendent pas de t, la courbe (1) a des modules indépendants, car on a

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \rho\,(y_1, z_1),$$
$$\zeta = \frac{P_3}{P_1} = \rho_1(y_1, z_1),$$

ρ, ρ_1 ne renfermant pas t; la relation entre η et ζ ne dépend donc pas de t, et, d'autre part, la correspondance entre (η, ζ) et (y, z) est birationnelle si P_1, P_2, P_3 sont convenablement choisis.

Le raisonnement est en défaut quand (1) est hyperelliptique; on a, dans ce cas, si

$$z^2 = R(y, t, u, \ldots) = y(y-1)(y-k_1)\ldots(y-k_{2p-1})$$

est l'équation de (1),

$$(a')\qquad \int \frac{dy}{\sqrt{R}} = \lambda_1 \int \frac{dy_1\,P'_1(y_1,z_1)}{F'_{z_1}} + \ldots + \lambda_{p'} \int \frac{P'_{p'}(y_1,z_1)\,dz_1}{F'_{z_1}},$$

et les λ_i doivent dépendre de t si les k_j en dépendent; autrement, pour une valeur de t qui rend égales deux racines de R, le premier membre deviendrait infini en certains points (y, z) de 1, le second membre restant toujours fini.

Admettons donc que λ_i dépendent de t dans l'équation (a) et traitons d'abord le cas où (1) serait hyperelliptique. Quand t tend vers t_0, le second membre de (a') croît indéfiniment, quel que soit (y_1, z_1); le premier membre, au contraire, ne devient infini que pour des valeurs particulières (y_0, z_0) de (y, z). Il faut donc que $y = \varphi(y_1, z_1)$, $z = \psi(y_1, z_1)$ tendent respectivement vers y_0, z_0 quand t tend vers t_0, quel que soit le point (y_1, z_1) de (2). Les fonctions φ et ψ dépendent de t algébriquement et se laissent développer suivant les puissances de $(t-t_0)^{\frac{1}{\nu}} = T$; par exemple,

$$y - y_0 = A(y_1, z_1)T^\lambda + A_1(y_1, z_1)T^{\lambda+1} + \ldots.$$

Soit A_i le premier des coefficients A qui dépende effectivement de (y_1, z_1); posons

$$\frac{y - y_0 - T^\lambda(A + A_1 T + \ldots + A_{i-1} T^{i-1})}{T^{\lambda+i}} = \eta$$

et de même

$$\frac{z - z_0 - T^\mu(B + B_1 T + \ldots + B_{j-1} T^{j-1})}{T^{\mu+j}} = \zeta.$$

La courbe que décrit le point (η, ζ) est encore hyperelliptique,

$$(1)' \qquad \zeta^2 = \rho(\eta),$$

et correspond birationnellement à la courbe (1) par une substitution de la forme

$$\eta = \alpha + \beta y, \qquad \zeta = \gamma + \delta z.$$

Elle a donc mêmes modules, et deux de ces modules deviennent égaux pour $t = t_0$. En raisonnant sur $(1)'$ comme sur (1), on voit que le point (η, ζ) doit tendre vers un point (η_0, ζ_0) particulier quand t tend vers t_0, et cela quel que soit le point (y_1, z_1) de (2). Or (η, ζ) varie, pour $t = t_0$, avec (y_1, z_1). Les modules de (1) et $(1)'$ sont donc indépendants de t. C. Q. F. D.

Ce raisonnement s'étend aux courbes (1) quelconques. Écrivons la condition que doivent vérifier les $(3p - 3)$ coefficients modules de (1) pour que le genre de cette courbe s'abaisse. On forme ainsi une relation en t qui a au moins une racine $t = t_0$. Pour $t = t_0$, le premier membre de (a) devient infini au moins en un point (y_0, z_0) de (1). Nous pouvons d'ailleurs admettre qu'il ne devient pas infini pour $t = t_0$, quel que soit le point (y, z), sinon il contiendrait en facteur $(t - t_0)^{-\nu}$ et on le multiplierait par $(t - t_0)^{+\nu}$. Dans ces conditions, un au moins des coefficients λ_j doit être infini pour $t = t_0$. On en conclut, comme ci-dessus, que, t tendant vers t_0, $y = \varphi(y_1, z_1)$, $z = \psi(y_1, z_1)$ doivent tendre, quel que soit le point (y_1, z_1) de (2), vers les valeurs (y_0, z_0) particulières qui rendent le premier membre de (1) infini. Le raisonnement s'achève dès lors comme pour les courbes hyperelliptiques.

Nous sommes maintenant en état d'énoncer le théorème suivant :

Les courbes de genre plus grand que 1 *qui se laissent transformer* genre de l'intersection C de S avec la surface Σ (ou $Q = 0$); désignons par γ la courbe d'intersection de deux surfaces Σ; cette courbe rencontre S en $(p_1 - 1)$ points.

Nous distinguerons trois groupes de surfaces : le premier (le plus général) comprend les surfaces S pour lesquelles toute surface Σ qui passe par un point de S ne passe pas nécessairement par d'autres points de S *correspondants* (en dehors des points singuliers de S). Pour ces surfaces, les p polynômes Q distincts, regardés comme les coordonnées homogènes d'un point de l'espace à $(p - 1)$ dimensions, définissent (à une transformation homographique près) une surface S_1 de cet espace, dite *surface normale*, qui correspond birationnellement à S. D'une manière plus précise, on peut exprimer que les trois surfaces

$$Q_2 - \alpha Q_1 = 0, \qquad Q_3 - \beta Q_1 = 0, \qquad Q_4 - \gamma Q_1 = 0$$

ont avec S un point commun et un seul. Pour cela, il faut et il suffit que α, β, γ vérifient une relation

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \tag{1'}$$

et, à chaque point (α, β, γ) de (1) correspond un seul point (x, y, z) de S. Cette surface S_1, qui correspond birationnellement à S, est de degré $(p_1 - p + 3)$, comme l'a montré M. Nœther.

Le second groupe (où nous rangeons les surfaces de genre $p = 3$) comprend les surfaces pour lesquelles toute surface Σ, passant par un point de S, passe par $(n - 1)$ autres points correspondants. On a nécessairement

$$n \leqq \frac{p_1 - 1}{p - 3}.$$

Toute surface Σ tangente à S *au point (x, y, z) est tangente à* S *aux points correspondants*. Toute courbe γ qui passe par (x, y, z) (ou est tangente à S en ce point) passe par les points correspondants (ou est tangente à S en ces points).

Le troisième groupe comprend les surfaces S (en particulier les surfaces de genre $p = 2$) pour lesquelles deux surfaces Σ, qui ont un point commun avec S, ont une ligne commune avec cette surface. Pour ces surfaces, les courbes C se décomposent en courbes de genre 1, et le rapport $\frac{Q_i(x,y,z)}{Q_j(x,y,z)}$ est une fonction de $\frac{Q_2(x,y,z)}{Q_1(x,y,z)}$ quand (x, y, z) varie sur S.

Ceci posé, soient S′ une seconde surface

$$F'(x', y', z') = 0, \tag{2}$$

p' et p'_1 les nombres qui correspondent aux nombres p et p_1.

Admettons qu'on puisse passer rationnellement de (1) à (2) par la transformation

$$x = h(x', y', z'), \qquad y = k(x', y', z'), \qquad z = l(x', y', z'), \tag{3}$$

qui dépend de paramètres arbitraires. En répétant le raisonnement qu'emploie M. Picard [1] dans l'étude des transformations birationnelles des surfaces, on démontre que toute intégrale double de première espèce J de S se transforme en une intégrale de S′

$$J = \lambda_1 J'_1 + \lambda_2 J'_2 + \ldots + \lambda_{p'} J'_{p'},$$

les λ_i étant des constantes. On en conclut que *p étant plus grand que 1, la transformation* (3) *ne saurait dépendre de deux paramètres arbitraires. Si elle dépend d'un paramètre,* S *rentre dans le troisième groupe, et le module des courbes* C (*de genre* 1) *est constant. Quand* S′ *est du troisième groupe, il en est de même de* S. *Enfin, on a, dans tous les cas,* $p \leq p'$, $p_1 \leq p'_1$.

Si je désigne par μ l'ordre de la transformation (3), c'est-à-dire le nombre de points (x', y', z') de S qui correspondent à un point (x, y, z) de S, ce nombre μ satisfait à l'égalité

$$\mu = \frac{p'_1 - 1}{p_1 - 1}.$$

Supposons maintenant que S et S′ appartiennent au premier groupe ; on aura

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\Sigma \mu_i Q'_i}{\Sigma \lambda_i Q'_i}, \qquad \frac{Q_3}{Q_2} = \frac{\Sigma \nu_i Q'_i}{\Sigma \lambda_i Q'_i}.$$

On devra donc pouvoir déterminer les constantes λ, μ, ..., de façon que les rapports α, β, γ introduits plus haut vérifient la relation (1)′,

[1] E. Picard, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*loc. cit.*).

et ces conditions sont suffisantes. Ceci nous montre qu'*on peut calculer algébriquement toutes les transformations* (3); *il ne saurait, par suite, exister entre* (1) *et* (2) *qu'un nombre fini de transformations rationnelles.* Ceci revient à dire qu'on passe de la surface de la normale S_1 à la surface normale S'_1 à l'aide de la transformation

$$Q_j = \sum_{i=1}^{i=p'} \lambda_j^i Q'_i.$$

Si donc $p = p'$, *la transformation* (3) *est nécessairement birationnelle.* On pourrait se servir également de la condition qui exprime que la surface Σ (ou la courbe γ) est tangente à S.

Passons au cas où S′ est du second groupe, S étant du premier, et où il existe une transformation (3). La méthode précédente s'applique. Ajoutons que, α', β', γ' désignant les rapports de quatre polynômes Q′ quelconques, la surface S'_1 ou

$$\varphi'(\alpha', \beta', \gamma') = 0$$

correspond rationnellement à S. Si S'_1 n'est pas du premier groupe, on raisonne sur S'_1 comme sur S′, et comme le genre p_1 des S'_i diminue, on parvient à une surface S″ du premier groupe qu'on peut substituer à S′. Si $p = p''$, la correspondance entre S et S″ est nécessairement birationnelle.

Plus généralement, cherchons toutes les surfaces S *distinctes* du premier groupe, qui correspondent rationnellement à la surface donnée S′. (Nous ne regardons pas comme distinctes deux surfaces qui se correspondent birationnellement.) On peut toujours supposer S de degré $(p_1 - p + 3)$, par suite de degré au plus égal à $(p'_1 - p' + 3)$. *On détermine dès lors algébriquement toutes les surfaces cherchées de ce degré. Il n'existe qu'un nombre fini q de surfaces* S *réellement distinctes et répondant à la question.*

Plaçons-nous maintenant dans le cas où S appartient au second groupe. On peut déterminer algébriquement toutes les substitutions (3) et, par suite, il n'en existe qu'un nombre fini. On le voit, en raisonnant comme M. Picard et en exprimant que les équations

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\Sigma\mu_i Q'_i}{\Sigma\lambda_i Q'_i}, \qquad \frac{Q_3}{Q_1} = \frac{\Sigma\nu_i Q'_i}{\Sigma\lambda_i Q'_i}$$

et les équations (1) et (2) déterminent rationnellement un système de valeurs (x, y, z) en fonction du point (x', y', z') de S', si $p_1 = p'_1$, la transformation (3) est birationnelle.

On peut également déterminer algébriquement toutes les surfaces S distinctes du second groupe qui correspondent rationnellement à S'.

Supposons enfin que S soit du troisième groupe, ce qui a toujours lieu si S' appartient lui-même au même groupe. Nous aurons

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\Sigma\mu_i Q'_i}{\Sigma\lambda_i Q'_i} = \frac{Q'_k}{Q'_j}.$$

Il doit exister un faisceau de surfaces Σ', dépendant de $(p-1)$ paramètres et tel que deux surfaces du faisceau qui ont un point arbitraire commun sur S' coïncident le long de S'. Cette condition, toujours satisfaite si $p = 2$, montre que, si $p = p'$, S' doit appartenir au troisième groupe. Il faut, de plus, que la courbe C (de genre 1)

$$Q_2 - \alpha Q_1 = 0, \qquad F = 0$$

corresponde rationnellement à la courbe C'

$$Q'_k - \alpha Q'_j = 0, \qquad F' = 0.$$

La question revient à reconnaître si une intégrale de première espèce de la courbe C' (pour un certain faisceau de surfaces Σ') ne se ramène pas aux intégrales elliptiques.

Cette question résolue, on déterminerait algébriquement les transformations (3), s'il en existe. *Quand le module k^2 des courbes* C *est constant, la transformation* (3) *peut dépendre d'un paramètre et de plusieurs entiers arbitraires. Si k^2 n'est pas constant, la transformation ne saurait dépendre que d'entiers arbitraires.*

Cette étude se rattache au problème de la transformation des fonctions hyperfuchsiennes. Mais je me réserve de développer ailleurs ces considérations, qui nous entraîneraient trop loin de notre sujet.

CHAPITRE III.

APPLICATION DES THÉORÈMES PRÉCÉDENTS A L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

1. Nous avons démontré, dans le premier Chapitre, que l'intégrale générale d'une équation (1)

$$F[y, y', (x)] = 0, \tag{1}$$

quand elle ne prend qu'un nombre limité de valeurs autour des points critiques mobiles, peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme

$$R[y, y', (x)] = C, \tag{2}$$

C désignant une constante et R une fonction rationnelle de y, y', dont les coefficients dépendent de x d'une façon quelconque.

On peut, de plus, choisir deux *constantes intégrales* de la forme (2)

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = R_1[y, y', (x)], \\ \beta = R_2[y, y', (x)], \end{array}\right. \tag{3}$$

de telle façon que toutes les constantes intégrales (2) s'expriment rationnellement en α, β

$$C = f(\alpha, \beta).$$

Les constantes α, β sont liées par une équation algébrique

$$f(\alpha, \beta) = 0, \tag{4}$$

que nous avons appelée ***relation entre les constantes intégrales***. Cette équation n'est définie qu'à une transformation birationnelle près.

Quand le genre de l'équation (4) est supposé différent de zéro, les théorèmes établis dans le précédent Chapitre trouvent immédiatement leur application dans l'étude de l'intégrale de (1).

Tout d'abord, supposons que ce genre ϖ de l'équation (4) soit plus grand que 1. Les égalités (3) établissent une correspondance rationnelle entre la courbe (4) et la courbe définie par l'équation (1), où l'on donne à x une valeur constante. Or nous savons déterminer algébriquement toutes les courbes

$$f(\alpha, \beta) = 0 \tag{4}$$

distinctes, de genre ϖ plus grand que 1, et qui correspondent rationnellement à la courbe donnée (1); nous savons aussi calculer algébriquement toutes les transformations (3) qui permettent de passer de (4) à (1).

Nous formons donc ainsi algébriquement un certain nombre de relations

$$(3)' \qquad \begin{cases} \alpha_i = R_1^i[y, y', (x)], \\ \beta_i = R_2^i[y, y', (x)], \end{cases}$$

et il faut qu'un de ces systèmes de relations (3)' définisse l'intégrale de (1), ce qu'on reconnaît également à l'aide d'opérations algébriques.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante : *On reconnaît algébriquement si l'intégrale de* (1) *ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, la relation entre les constantes intégrales étant supposée de genre* ϖ *plus grand que* 1. *L'intégrale, dans ce cas, s'obtient elle-même algébriquement.*

Si n désigne le nombre de valeurs de y qui se permutent autour des points critiques mobiles, la transformation de (4) en (1) est d'ordre n. On a donc, d'après un théorème établi plus haut,

$$n = \frac{p-1}{\varpi - 1}.$$

Nous voyons que le nombre n est un diviseur de $p-1$, et, par suite, ce nombre ne peut dépasser $(p-1)$, quand la relation (4) est de genre plus grand que 1. De plus, quand $\varpi = p$, la transformation (3) est nécessairement birationnelle, et l'intégrale n'a que des points critiques fixes.

2. Supposons maintenant que le genre ϖ de (4) soit égal à l'unité. Prenons l'équation (4) sous la forme

$$\beta = \sqrt{(1-\alpha^2)(1-k^2\alpha^2)}. \tag{5}$$

Dans l'équation

$$(1) \qquad F[y, y', (x)] = 0,$$

faisons, pour plus de clarté, $y' = z$, et donnons à x une valeur constante quelconque. Elle devient

$$(1)' \qquad F[y, z, (x)] = 0.$$

Par hypothèse, les relations

$$\alpha = R_1[y, z, (x)],$$
$$\beta = R_2[y, z, (x)]$$

permettent de passer de la courbe (5) à la courbe $(1)'$. On a donc, en conservant la même notation qu'au Chapitre précédent,

$$(6) \quad \frac{d\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2)(1-k^2\alpha^2)}} = \frac{\lambda_1 P_1(y, z) + \lambda_2 P_2(y, z) + \ldots + \lambda_p P_p(y, z)}{F'_z} dy.$$

Dans cette égalité, les P_i désignent des polynômes en y et y', dont les coefficients dépendent de x ainsi que les λ.

Par conséquent,

$$\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{(1-\alpha)(1-h^2\alpha^2)}} = h + \int_0^y \frac{\lambda_1 P_1(y, z) + \ldots + \lambda_p P_p(y, z)}{F'_z} dy$$

ou enfin

$$J(\alpha) = h + J'[y, z, (x)],$$

h désignant une fonction de x.

En posant $\alpha = \operatorname{sn} C$, on voit qu'en définitive il doit exister une intégrale abélienne de première espèce de la courbe $(1)'$ telle que l'intégrale de l'équation (1) puisse se mettre sous la forme

$$J'[y, z, (x)] + h(x) = C;$$

z représente, dans cette égalité, la fonction de y et z définie par $(1)'$.

Pour tenir compte plus aisément de cette condition, supposons l'équation (1) résolue par rapport à y'

$$y' = z = K[y, (x)],$$

et remplaçons z par K $[y, (x)]$. Si nous posons

$$J'_1(y, x) = J'[y, K(y, x), x],$$

la condition précédente devient

$$J'_1(y, x) = -h(x) + C$$

ou bien

$$\frac{dJ'_1}{dx} = \frac{\partial J'_1}{\partial y} K(y, x) + \frac{\partial J'_1}{\partial x} = -h'(x).$$

Cette égalité équivaut à la suivante

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 J'_1}{\partial y^2} K(y, x) + \frac{\partial J'_1}{\partial y} \frac{\partial K(y, x)}{\partial y} + \frac{\partial^2 J'_1}{\partial y\, \partial x} \equiv 0.$$

On a, d'autre part,

$$J'_1(y, x) = \lambda_1 \int_0^y H_1[y, (x)]\, dy + \ldots + \lambda_p \int_0^y H_p[y, (x)]\, dy,$$

$H_i[y, (x)]$ représentant l'expression

$$\frac{P_i[y, z, (x)]}{F'_z},$$

où l'on fait

$$z = K[y, (x)].$$

L'égalité (7) peut alors s'écrire

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda_1\left(K\frac{\partial H_1}{\partial y} + H_1\frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial x}\right) + H_1\frac{d\lambda_1}{dx} \\ &+ \lambda_2\left(K\frac{\partial H_2}{\partial y} + H_2\frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial H_2}{\partial x}\right) + H_2\frac{d\lambda_2}{dx} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \lambda_p\left(K\frac{\partial H_p}{\partial y} + H_p\frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial H_p}{\partial x}\right) + H_p\frac{d\lambda_h}{dx} = 0. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients des λ_i, $\frac{d\lambda_i}{dx}$ dans cette égalité sont des fonctions de y (et de x), qui s'expriment rationnellement en y, z.

Écrivons que l'équation (8) a lieu identiquement pour tous les systèmes de valeurs y, z, x, qui vérifient la relation

$$F[y, z, (x)] = 0.$$

Nous obtenons ainsi un certain nombre ν d'équations linéaires et homogènes en λ_i et $\frac{d\lambda_i}{dx}$:

$$(9) \qquad A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + \ldots + A_p\lambda_p + B_1\frac{d\lambda_1}{dx} + B_2\frac{d\lambda_2}{dx} + \ldots + B_p\frac{d\lambda_p}{dx} = 0,$$

. . . .

Les quantités A_i, B_i représentent des fonctions de x qui s'expriment rationnellement à l'aide des coefficients de y, z dans l'équation (1').

Si l'intégrale de (1) est de la forme indiquée, ces équations doivent être compatibles. Peuvent-elles être indéterminées? Tout d'abord l'égalité

$$\frac{\partial J'_1}{\partial y} K(y, x) + \frac{\partial J'_1}{\partial x} = -h'(x),$$

qu'on peut écrire

$$H(y, x)\,K(y, x) + \int_0^y \frac{\partial H(y, x)}{\partial x}\,dy = -h'(x),$$

nous montre que l'intégrale abélienne

$$\frac{\partial J'_i}{\partial x} = \int_0^y \frac{\partial H(y, x)}{\partial x}\,dy$$

est une fonction algébrique de y; elle n'a donc pas de périodes, et, par suite, les périodes de l'intégrale abélienne J' sont indépendantes de x.

Donc, quand une intégrale abélienne J' de la courbe (1) satisfait à l'égalité (7), ses périodes sont indépendantes de x.

D'autre part, si J' satisfait à cette égalité, il en est de même de $\mu J'$, μ désignant une constante. Plus généralement, si les intégrales indépendantes J', J'', J''', ... vérifient cette condition (7), l'intégrale

$$\mu J' + \mu' J'' + \mu'' J''' + \ldots$$

jouit de la même propriété.

Mais, si les systèmes de solutions λ_1, λ_2, ..., λ_i de (9) peuvent dépendre de constantes μ, μ', ..., ils ne sauraient renfermer de fonctions arbitraires de x. On s'en rend compte de la manière suivante : appelons J_1, J_2, ..., J_p les p intégrales abéliennes normales de première espèce, c'est-à-dire celles qui ont pour Tableau des périodes le Tableau

$$\begin{array}{cccccccc}
1, & 0, & 0, & \ldots, & \omega_1^1, & \omega_1^2, & \ldots, & \omega_1^p, \\
0, & 1, & 0, & \ldots, & \omega_2^1, & \omega_2^2, & \ldots, & \omega_2^p, \\
.., & .., & .., & \ldots, & .., & .., & \ldots, & .., \\
0, & 0, & 0, & ..1, & \omega_p^1, & \omega_p^2, & \ldots, & \omega_p^p,
\end{array}$$

avec les conditions $\omega_i^j = \omega_j^i$.

Si une intégrale quelconque

$$J = \lambda_1 J_2 + \lambda_2 J_2 + \ldots = \lambda_p J_p$$

a ses périodes constantes, les λ_1, λ_2, ..., λ_p sont eux-mêmes des constantes.

D'après cela, le système des λ_i le plus général qui satisfait aux équations (9) ne peut dépendre que de constantes : ces constantes, en nombre q au plus égal à p, y figurent d'une façon linéaire et homogène.

Quand $q = p$, toutes les périodes ω_j^i sont des constantes, la courbe (1) a ses modules indépendants de x.

Ce cas particulier, que nous traiterons plus loin, mis à part, q est égal au plus à $(p-1)$, c'est-à-dire que les λ_i sont déterminées par un système d'équations différentielles linéaires et homogènes d'ordre $(p-1)$ au plus.

On peut se demander si certaines courbes

$$F[y, z, (x)] = 0$$

admettent effectivement plusieurs intégrales J dont les périodes sont indépendantes de x, quand les modules de la courbe dépendent eux-mêmes de x. Les travaux de M. Picard permettent de répondre affirmativement à cette question. Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer une surface algébrique

$$F_1(y, z, x) = 0,$$

ayant q différentielles totales de première espèce. Si on laisse x constant dans cette équation, les courbes

$$F_1(y, z, x_0) = 0$$

ont des modules variables avec x_0 (sauf pour des surfaces exceptionnelles), et ces courbes admettent q intégrales abéliennes de première espèce, dont les périodes ne dépendent pas de x (1).

Le plus fréquemment, il n'existe qu'une intégrale J distincte répondant à la question. Cette intégrale J s'obtient alors à l'aide d'une quadrature

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = g(x).$$

Une fois λ calculé, en posant

$$Y = J(y, z, x) = \int_0^y H(y, x)\,dy = J_1(y, x),$$

la dérivée

$$\frac{dY}{dx} = \frac{\partial J_1}{\partial y} K + \frac{\partial J_1}{\partial x} = \varphi(y, z, x)$$

se réduit d'elle-même à une simple fonction de x, $-h'(x)$, quand on tient compte de

$$F(y, z, x) = 0,$$

et l'équation s'intègre à l'aide de la quadrature

$$\frac{dY}{dx} = -h'(x).$$

Mais, dans certains cas particuliers, la recherche des λ_i exigera la connaissance d'une intégrale particulière d'une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre q ($q \leqq p - 1$). Une telle intégrale une fois connue, l'équation s'intégrera en posant encore

$$Y = J(y, z, x),$$

à l'aide d'une quadrature

$$\frac{dY}{dx} = -h'(x).$$

(1) E. PICARD, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*loc. cit.*). — *Voir* aussi les deux Mémoires du même Auteur *Sur les surfaces algébriques* (*Journal de Mathématiques*, années 1885, 1886).

Remarquons que ces facteurs λ_i sont liés par certaines relations à des fonctions connues de x.

En effet, écrivons les périodes des p intégrales abéliennes distinctes de la courbe (1) :

$$\begin{array}{cccc} \omega_2^1, & \omega_1^2, & \ldots, & \omega_1^{2p}, \\ \omega_2^1, & \omega_2^2, & \ldots, & \omega_2^{2p}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \omega_p^1, & \omega_p^2, & \ldots, & \omega_p^{2p}. \end{array}$$

Les coefficients λ_1 doivent vérifier les $2p$ égalités

$$(\alpha) \qquad \lambda_1 \omega_1^i + \lambda_2 \omega_2^i + \ldots + \lambda_p \omega_p^i = C_i$$

C_i désignant une constante. Les quantités ω_j^i sont des fonctions de x données par des intégrales définies

$$\omega_i^j = \int_{a_{i,j}(x)}^{b_{i,j}(x)} \frac{P_i[y, z, (x)]}{F'_z} dy.$$

Si même J vérifie l'équation (6), les C_i doivent s'exprimer en fonction de deux nombres α, β, ainsi

$$C_i = m_i \alpha + n_i \beta.$$

Mais on ne peut, en général, tirer parti de ces égalités, car il resterait à vérifier que les combinaisons des ω_j^i qui donnent les λ satisfont aux équations différentielles (9), ce qu'on ne sait pas faire.

Il est un cas pourtant où la recherche des λ s'effectue sans difficulté, c'est le cas signalé plus haut, où les modules de la courbe (1) sont indépendants de x.

On peut alors établir une correspondance birationnelle

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} y = \varphi[t, T, (x)], & t = \varphi_1[y, z, (x)], \\ z = \psi[t, T, (x)], & T = \psi_1[y, z, (x)] \end{array} \right.$$

entre la courbe

$$(1) \qquad F[y, z, (x)]$$

et la courbe

$$(10) \qquad F_1(t, T) = 0,$$

F_1 étant une courbe qui ne dépend pas de x et dont les modules sont égaux à ceux de (1).

Soient $j_1(t, T), j_2(t, T), \ldots, j_p(t, T)$ p intégrales distinctes de première espèce de la courbe (10), intégrales où ne figure pas x et dont les périodes sont, par suite, des constantes. Soient, d'autre part, $J_1[y, y', (x)]$, $J_2[y, y', (x)]$, $\ldots$, $J_p[y, y', (x)]$ les p intégrales abéliennes de (1) qui correspondent birationnellement aux p intégrales de (10). Leurs périodes sont des constantes, et on en déduit aussitôt que toute intégrale

$$J = \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \ldots + \lambda_p J_p,$$

dont les périodes sont aussi des constantes, s'obtient en donnant aux λ des valeurs constantes.

Le problème revient donc à déterminer ces p constantes de façon que $\frac{dJ}{dx}$ soit une simple fonction de x, quand on tient compte de l'équation (1). Si la chose est possible (ce qu'on reconnaît algébriquement), l'équation (1) s'intègre par quadratures.

Appliquons ce qui précède à l'équation la plus générale de genre 1. Soient

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha = R\,[y, y', (x)], \\ \beta = R_1[y, y', (x)] \end{cases}$$

deux formes de l'intégrale générale de l'équation

$$F[y, y', (x)] = 0,$$

de genre 1. La relation entre α, β est de genre ϖ, au plus égal à 1. Supposons qu'elle soit effectivement de genre 1 et qu'on l'ait ramenée à la forme

$$\beta^2 = (1 - \alpha^2)(1 - k_0^n \alpha^2).$$

Nous pouvons, par une substitution birationnelle,

$$(A) \qquad \begin{cases} y = \varphi[t, T, (x)], & t = \varphi_1[y, z, (x)], \\ z = \psi[t, T, (x)], & T = \psi_1[y, z, (x)] \end{cases}$$

faire correspondre à la courbe

$$(1) \qquad F[y, z, (x)] = 0$$

la courbe

$$(10)\qquad T^2 = (1 - t^2)(1 - k^2 t^2).$$

Dans cette équation, k^2 est une fonction de x.

La fonction $t(x)$, définie par la substitution (A), vérifie une équation différentielle transformée de l'équation (1) et qu'on obtient en écrivant l'égalité

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial T}\frac{dT}{dt}\right)\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} = z = \psi[t, T, (x)],$$

T désignant la fonction de t définie par l'équation (10). On a d'ailleurs

$$\alpha = R'[t, T, (x)],$$
$$\beta = R'_1[t, T, (x)],$$

R' et R'_1 étant rationnels en t, T; par suite,

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2)(1 - k''_0\alpha^2)}} = \frac{\lambda\, dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}.$$

Cette égalité ne peut avoir lieu que si k vérifie une des équations modulaires relatives à k_0; k ne peut donc varier d'une façon continue tandis que k_0 reste constant, et, par suite, k est indépendant de x. L'égalité exige alors que λ soit lui-même constant, et l'équation différentielle en t doit être de la forme

$$\frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} = G(x)\, dx,$$

Si l'on pose alors

$$h(x) = \int G(x)\, dx,$$

on a

$$t(x) = \operatorname{sn}[h(x) + C];$$

l'intégrale générale $t(x)$ n'a que des points critiques fixes, et il en est de même de l'intégrale générale de l'équation (1). Nous savons d'ailleurs que, réciproquement, quand l'intégrale de l'équation (1) n'a que des points critiques fixes, le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales est égal au genre de (1), ici à l'unité, de sorte que nous sommes conduits, en définitive, aux théorèmes suivants :

Les seules équations différentielles de genre 1 *pour lesquelles le genre* ϖ *de la relation entre des constantes intégrales est égal à l'unité sont les équations dont l'intégrale générale n'a que des points critiques fixes.*

Il n'y a pas lieu de s'étonner de la simplification qui se produit dans le cas où p est égal à 1. Quand p est quelconque, les périodes ω_i^j des intégrales J doivent satisfaire [pour que les relations (α) entre les λ_i soient compatibles] à p relations, dont les coefficients sont constants; ces périodes dépendent de $(3p-3)$ modules, que ces p relations ne suffisent pas à déterminer, et qui, par suite, peuvent être fonctions de x.

Au contraire, quand $p=1$, le nombre des modules est égal à 1, et ce module, devant satisfaire à une relation dont les coefficients sont constants, est lui-même constant.

Revenons au cas général de p quelconque. S'il existe une ou plusieurs intégrales J de première espèce telles que l'intégrale générale de l'équation (1) soit donnée par la relation

$$(\beta)\qquad J[y, z, (x)] + h(x) = C,$$

on n'en saurait conclure que cette intégrale prend un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles et correspond au cas de $\varpi = 1$.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut, de plus, que l'une des intégrales abéliennes qu'on vient de calculer n'ait que deux périodes. Si cette nouvelle condition est accomplie (ce que l'on ne sait pas reconnaître en général) en posant

$$\gamma = \operatorname{sn}(J + h + c),$$

on voit que γ est une fonction rationnelle de y, z,

$$\gamma = \rho[y, z, (x)],$$

et l'intégrale générale de (1) ne prend autour des points critiques mobiles qu'un nombre fini de valeurs. Cette dernière condition se trouve vérifiée d'elle-même quand $p = 1$.

Nous arrivons donc aux conclusions suivantes :

Quand l'intégrale d'une équation différentielle (1) *ne prend qu'un* *nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, le genre* ϖ *de la relation entre les constantes intégrales est compris entre* o *et* p (*inclusivement*).

On reconnaît algébriquement si l'intégrale d'une équation donnée est de cette nature et correspond, de plus, à une valeur de ϖ *supérieure à* 1. *L'équation s'intègre alors algébriquement.*

On reconnaît algébriquement si l'intégrale de (1) *est de cette nature et correspond à la valeur* $\varpi = 1$ *de* ϖ (*et l'équation s'intègre alors par quadratures*), *ou bien on ramène l'intégration de l'équation à la recherche d'une intégrale particulière quelconque d'une équation linéaire et homogène d'ordre* $(p-1)$ *au plus : cette dernière intégrale calculée, l'équation* (1) *s'intègre par quadratures.*

Si $\varpi = p$ (p *étant différent de zéro*), *l'intégrale de l'équation* (1) *n'a que des points critiques fixes.*

La méthode n'indique rien sur le cas où ϖ serait nul. Quand $p = 0$, ϖ est nécessairement nul. Il en est de même lorsque p est égal à 1 et que l'intégrale a des points critiques mobiles. Les équations de genre $p = 0$ et $p = 1$ échappent donc complètement à ce procédé d'intégration.

Avant de nous occuper d'une autre méthode qui s'applique aux équations (1), de genre o, je ferai quelques remarques sur la manière dont il convient d'employer la méthode précédente.

3. Tout d'abord, on peut se servir de la transformation birationnelle

$$(\gamma) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} y = \varphi[t, \mathrm{T}, (x)], & t = \varphi_1[y, z, (x)], \\ z = \psi[t, \mathrm{T}, (x)], & \mathrm{T} = \psi_1[y, z, (x)], \end{array} \right.$$

pour ramener l'équation (1) à la forme la plus simple. Par exemple, si l'équation (1)

$$(1) \qquad \mathrm{F}(y, y', x) = 0$$

est de l'espèce hyperelliptique, on ramène l'équation par une substitution (γ) à la forme

$$\frac{dt}{dx} = \mathrm{M}[t, (x)] + \mathrm{N}[t, (x)]\sqrt{\mathrm{P}[t, (x)]}.$$

Quand l'intégrale y de (1) prend un nombre donné n de valeurs autour des points critiques mobiles (par exemple, quand y n'a que des points critiques fixes), il en est de même de l'intégrale $t(x)$ de l'équation

$$F'[t, t', (x)] = 0,$$

Mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie. Soit en effet

$$F_1[t, T, (x)] = 0$$

la relation entre t et T; l'équation en t et t' s'écrit

$$\frac{d}{dx}\varphi[t, T, (x)] = \psi[t, T, (x)]$$

ou

$$(\delta) \qquad t' = h[t, T, (x)],$$

T désignant la fonction de t et de x définie par l'équation $F_1 = 0$. L'équation en (t, t', x) s'obtient en éliminant T entre (δ) et $F_1 = 0$.

On passe, par une transformation rationnelle de la courbe F' à la courbe F_1, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie : plusieurs valeurs de T peuvent correspondre à chaque système t, t'.

Supposons, par exemple, que T ne figure pas dans $h[t, T, (x)]$. Pour que l'équation (1) ait ses points critiques fixes, il faut d'abord que cette propriété appartienne à l'équation

$$t' = h[t, (x)],$$

et de plus que la fonction $T(x)$, définie par l'équation

$$F_1[t, T, (x)] = 0,$$

quand on y remplace t en x, ait elle-même ses points critiques fixes.

Mais, dans tous les cas, les conditions exprimant que t prend n valeurs autour des points critiques mobiles seront *nécessaires* pour que y jouisse de la même propriété [1].

---

[1] Observons d'ailleurs que, si ces conditions sont remplies, y ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles; mais ce nombre peut être, dans certains cas, plus grand que n.

Une seconde remarque est relative aux substitutions multiples, qui permettent de passer rationnellement d'une courbe algébrique à une autre. Parmi ces substitutions, nous ne regardons comme *distinctes* que celles qui ne se déduisent pas l'une de l'autre par une transformation birationnelle. En voici la raison : supposons que l'intégrale de l'équation (1) vérifie les deux relations

$$\alpha = R_1[y, y', (x)], \qquad \beta = R_2[y, y', (x)],$$

qui transforment rationnellement la courbe

$$f(\alpha, \beta) = 0$$

en la courbe (1).

Toutes les substitutions

$$\alpha' = R'_1[y, y', (x)], \qquad \beta' = R'_1[y, y', (x)],$$

qui se peuvent déduire birationnellement de la première définissent également l'intégrale de (1). Car on a

$$\alpha' = \varphi(\alpha, \beta), \qquad \beta' = \psi(\alpha, \beta),$$

φ et ψ ne pouvant dépendre de x, si ϖ est plus grand que 1. Voici donc comment on dirigera le calcul : on déterminera un type de toutes les classes de courbes

$$f(\alpha, \beta) = 0 \qquad (\text{de genre } \varpi > 1),$$

dont la courbe (1) se déduit rationnellement, et l'on déterminera également un type de toutes les substitutions rationnelles distinctes qui transforment la courbe $f = 0$ en la courbe (1). Il suffira de vérifier si une de ces substitutions définit l'intégrale de (1).

4. Cette remarque trouve son application naturelle quand on traite le problème résolu par M. Poincaré : intégrer les équations (1) qui n'ont que des points critiques fixes.

La question revient à reconnaître si, parmi les substitutions birationnelles qui transforment la courbe

$$F[y, y', (x)] = 0$$

en la courbe

$$F_0[y_0, y'_0, (x_0)] = 0,$$

il en est une qui définit l'intégrale de (1). D'après ce qui précède, quand une de ces substitutions jouit de cette propriété, elle appartient aussi à toutes les autres. Quand p est plus grand que 1, le nombre de ces substitutions, qui est fini, peut être très grand : il suffit d'en essayer une seule.

Je renvoie, pour les développements relatifs à ce problème, au Mémoire déjà cité de M. Poincaré. J'ajoute seulement que, dans le cas où $p=1$, l'équation s'intègre, si elle a ses points critiques fixes, à l'aide d'une quadrature de la forme

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=g(x)\,dx.$$

Ceci résulte de ce que nous avons dit précédemment.

Quant au cas de $p=0$, il se traite immédiatement en posant

$$y=\varphi(t), \qquad z=\psi(t),$$

avec

$$t=\chi(y,z).$$

L'équation en t

$$t'=R[t,(x)]$$

n'ayant de points critiques, quand x est quelconque, ni pour t fini, ni pour t infini, est une équation de Riccati.

Pour donner un exemple de l'utilité de telles transformations, retrouvons directement les résultats de M. Poincaré dans le cas où l'équation (1) est de genre 1 ou d'espèce hyperelliptique.

Faisons

$$y=\varphi[t,T,(x)], \qquad t=\varphi_1[y,z,(x)],$$
$$z=\psi[t,T,(x)], \qquad T=\psi_1[y,z,(x)],$$

avec

$$T^2=R[t,(x)].$$

R est un polynôme de degré 4, si le genre p de (1) est l'unité, de degré $2p+2$, si p est quelconque.

Soit d'abord $p=1$, on a

$$R[t,(x)]=t(1-t^2)(t-\xi),$$

ξ étant une fonction de x, et t vérifie l'équation

$$t' = A[t,(x)] + B[t(x)]\sqrt{R[t,(x)]}.$$

Deux cas sont à distinguer, suivant que B est nul ou non.

Si B est nul; on doit avoir

$$t' = lt^2 + mt + n;$$

de plus $\sqrt{R[t,(x)]}$ est une fonction de x qui ne doit avoir que des points critiques fixes. On en conclut aussitôt que $t = 0$, $t = 1$, $t = -1$ sont des intégrales de l'équation de Riccati, qui se réduit alors à

$$t' = 0,$$

et comme $t = \xi$ est aussi une intégrale de cette équation, ξ est une constante. L'intégrale y est donnée par l'égalité

$$y = \varphi[t_0, T_0, (x)].$$

Si B n'est pas nul, en exprimant que $\frac{dt}{dx}$ ne devient infini quand x est quelconque pour aucune valeur de t $\Big($et qu'il en est de même pour l'équation en $\frac{1}{t}\Big)$, on voit d'abord que $A(t, x)$ est un polynôme du second degré en t et que B ne dépend pas de t. D'autre part, les valeurs $t = 0$, $t = +1$, $t = -1$, $t = \xi$ doivent être des intégrales singulières, ce qui exige que $A[t,(x)]$ soit identiquement nul et que ξ soit une constante. L'équation en t est donc de la forme

$$\frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = B(x)\,dx;$$

c'est ce que nous voulions démontrer.

Le cas où p est quelconque ne se traite pas moins facilement. On a

$$R[t,(x)] = t(1-t^2)(t-\xi)(t-\xi_1)\ldots(t-\xi_{2p-3}).$$

En premier lieu, $\frac{dt}{dx}$ ne devant être infini pour aucune valeur de t quand x est quelconque $\Big($et l'équation en $\frac{1}{t}$ devant offrir le même caractère$\Big)$, B est identiquement nul, et l'équation se réduit à

$$\frac{dt}{dx} = lt^2 + mt + n.$$

D'autre part, pour que $\sqrt{R(t, x)}$ soit une fonction de x à points critiques fixes, il faut que $t = 0$, $t = 1$, $t = -1$ soient des intégrales de l'équation de Riccati, qui se réduit ainsi à

$$\frac{dt}{dx} = 0,$$

et comme $t = \xi$, $t = \xi_1$, ..., $t = \xi_{2p-3}$ sont des intégrales, les modules de $\sqrt{R[t, (x)]}$ sont des constantes.

Nous retrouvons bien ainsi, dans ces cas particuliers, les résultats de M. Poincaré.

5. Indiquons rapidement quelques autres applications. Il est facile de former des équations (1), de genre quelconque, telles que la relation entre les constantes intégrales soit d'un genre aussi élevé qu'on veut. Il suffit, en effet, de partir d'une équation irréductible

$$y^n + R_{n-1}[\alpha, \beta, (x)]\, y^{n-1} + \ldots + R_0[\alpha, \beta, (x)] = 0,$$

où α, β désignent des constantes liées par une relation

$$f(\alpha, \beta) = 0,$$

de genre ϖ. J'entends par équation iréductible une équation telle que les n valeurs de y se permutent autour des points critiques variables x. Si l'on astreint les fonctions rationnelles R_i de (α, β) à la seule condition qu'à tout système de valeurs ... $R_{i, \ldots, \ldots}\ \frac{dR_i}{dx} \cdots$ ne corresponde qu'un système (α, β), la fonction y, définie par l'équation précédente, satisfait à une relation

$$F[y, y', (x)] = 0,$$

dont le genre p est lié à ϖ par la relation

$$\frac{p-1}{\varpi - 1} = n.$$

La méthode que nous venons d'exposer pourra donc permettre d'intégrer aisément un grand nombre d'équations différentielles. Les calculs auxquels elle conduit ne sont pas impraticables. Pour les effectuer plus facilement, il conviendra de prendre l'équation

$$f(\alpha, \beta) = 0,$$

sous la forme de Clebsch : elle est alors de degré $(p+1)$. Parmi les polynômes P_i relatifs à cette courbe, il en existe alors trois tels que

$$\frac{P_2}{P_1} = \alpha, \qquad \frac{P_3}{P_1} = \beta,$$

et l'on a

$$(\mathrm{K}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\sum_{i=1}^{i=p} \mu_i P'_i[y, z, (x)]}{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i P'_i[y, z, (x)]}, \\ \beta &= \frac{\sum_{i=1}^{i=p} \nu_i P'_i[y, z, (x)]}{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i P'_i[y, z, (x)]}. \end{aligned} \right.$$

Il faut déterminer les λ_i, μ_i, ν_i de façon que le point (α, β) parcoure $f = 0$ quand (y, z) parcourt (1) et que les relations ci-dessus définissent en outre l'intégrale de (1) [1].

Par exemple, si l'équation (1) est du genre 5, le genre ϖ peut être égal à 5 (et l'intégrale a ses points critiques fixes), à 3 (et l'intégrale est à deux valeurs), à 2 (et l'intégrale est à quatre valeurs); enfin à 1 ou à 0. Cherchons, par exemple, si l'intégrale de (1) correspond au genre $\varpi = 3$. Pour cela, nous formons l'équation

$$f(\alpha, \beta) = 0,$$

la plus générale du quatrième degré, et nous écrivons que α et β vérifient les formules (K).

De même, si $p = 3$, ϖ peut être égal à 3, à 2 (et l'intégrale est à deux

[1] Le cas où la relation $f = 0$ serait hyperelliptique se traite à part sans difficulté.

valeurs), enfin à 1 ou à 0. Pour traiter le cas de $\varpi = 2$, on prend l'équation en (α, β) sous la forme

$$\beta^2 = \rho(\alpha) = A_6\alpha^6 + A_5\alpha^5 + \ldots + A_0,$$

et l'on a

$$\alpha = \frac{\Sigma\mu_i P'_i[y, z, (x)]}{\Sigma\lambda_i P'_i[y, z, (x)]}.$$

On exprime que $\sqrt{\rho(\alpha)}$ est une fonction rationnelle du point (y, z) de (1) et, de plus, que la dernière égalité définit l'intégrale de (1).

Si, en particulier, la courbe (1) est une courbe du quatrième degré sans point double, il vient

$$\alpha = \frac{\mu_1 + \mu_2 y + \mu_3 z}{\lambda_1 + \lambda_2 y + \lambda_3 z},$$

$$(l) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\lambda_1 + \lambda_2 y + d_3 z)^6 \rho(\alpha) \\ &\quad = A_6(\mu_1 + \mu_2 y + \mu_3 z)^6 + A_5(\lambda_1 + \lambda_2 y + \lambda_3 z)(\mu_1 + \mu_2 y + \mu_3 z)^5 \\ &\qquad\qquad + \ldots + A_0(\lambda_1 + \lambda_2 y + \lambda_3 z)^6 \\ &\quad \equiv B_2[y, (x)]z^2 + B_1[y, (x)]z + B_0[y, (x)], \end{aligned} \right.$$

en supposant, ce qui est toujours possible, qu'on ait ramené l'équation (1) à être du troisième degré en z.

Il faut que le second membre de (l) soit de la forme

$$\{C_2[y, (x)]z^2 + C_1[y, (x)]z + C_0[y, (x)]\}^2$$

quand (y, z) parcourt (1).

Cette dernière quantité peut s'écrire

$$\gamma_2 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_0,$$

les quantités $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ s'exprimant aisément à l'aide des C_0, C_1, C_2 qui y entrent au second degré et des fonctions g_0, g_1, g_2 de l'équation

$$F[y, z, (x)] \equiv z^3 + g_2[y, (x)]z^2 + g_1[y, (x)]z + g_0[y, (x)] = 0.$$

Si l'on écrit

$$\begin{aligned} \gamma_2 &\equiv B_2, \\ \gamma_1 &\equiv B_1, \\ \gamma_0 &\equiv B_0, \end{aligned}$$

il faut disposer des fonctions λ_i, μ_i de (x) qui figurent dans B_0, B_1, B_2

de façon que ces égalités définissent pour C_0, C_1, C_2 des fonctions rationnelles de y. On calcule ainsi les λ_i, μ_i algébriquement.

Le cas où la courbe (1) est hyperelliptique présente certaines particularités. Si la courbe est donnée directement sous la forme

$$(1) \qquad y' = A[y, (x)] + B[y, (x)]\sqrt{R[y, (x)]},$$

l'intégrale de (1) ne saurait correspondre à un nombre ϖ plus grand que 1. En effet, la courbe

$$f(\alpha, \beta) = 0$$

est alors elle-même hyperelliptique et peut se ramener à la forme suivante :

$$\beta^2 = \rho(\alpha).$$

On doit avoir

$$\alpha = \frac{\mu_1 + \mu_2 y + \ldots + \mu_{p-1} y^{p-1}}{\lambda_1 + \lambda_2 y + \ldots + \lambda_{p-1} y^{p-1}},$$

et l'équation différentielle dont l'intégrale vérifie une telle relation est de la classe

$$y' = H[y, (x)],$$

H désignant une fonction rationnelle de y, ce qui est contre l'hypothèse.

D'après cela, soit une équation (1) quelconque d'espèce hyperelliptique

$$F[y, y', (x)] = 0.$$

L'intégrale d'une telle équation peut correspondre à un nombre ϖ plus grand que 1, comme le montre l'exemple de $p = \varpi$; mais si, dans ce cas, on ramène l'équation à la forme

$$\frac{dt}{dx} = A[t, (x)] + B[t, (x)]T$$

en posant

$$y = \varphi[t, T, (x)], \qquad t = \varphi_1[y, y', (x)],$$
$$z = y' = \psi[t, T, (x)], \qquad T = \psi_1[y, y', (x)]$$

avec

$$T^2 = R[t, (x)],$$

B est nécessairement nul; autrement la correspondance entre (y, y')

et (t, t') serait birationnelle, et le nombre ϖ relatif à l'équation en t serait plus grand que 1, ce qui est impossible. Cette singularité, que nous avons rencontrée quand $p = \varpi$, se présente donc encore pour ϖ quelconque et plus grand que 1.

Mais l'intégrale d'une équation

$$y' = A[y, (x)] + B[y, (x)]\sqrt{R[y, (x)]}$$

peut correspondre à la valeur $\varpi = 1$. Cherchons, par exemple, si l'équation

$$y'^2 = A_q y^q + A_{q-1} y^{q-1} + \ldots + A_0$$

admet pour intégrale une fonction qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales étant supposé différent de zéro.

D'après ce qui précède, ϖ n'étant pas nul ne peut être qu'égal à l'unité : l'intégrale doit vérifier la relation

$$\int_0^y \frac{(\lambda_0 + \lambda_1 y + \ldots + \lambda_{p-1} y^{p-1})\,dy}{\sqrt{R}} + h(x) = C.$$

En effectuant le calcul comme il a été indiqué au § II, on trouve que les λ sont astreints à la condition

$$\begin{aligned}&[\lambda_1 + 2\lambda_2 y + \ldots + (p-1)\lambda_{p-1} y^{p-2}]\\ &\quad + \frac{\dfrac{d\lambda_0}{dx} + \dfrac{d\lambda_1}{dx} y + \ldots + \dfrac{d\lambda_{p-1}}{dx} y^{p-1}}{\sqrt{R}} - \frac{1}{2}\frac{R'_x}{R\sqrt{R}}(\lambda_0 + \lambda_1 y + \ldots + \lambda_{p-1} y^{p-1}) \equiv 0.\end{aligned}$$

Ceci exige d'abord que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{p-1} = 0,$$

ensuite que

$$\frac{\dfrac{d\lambda_0}{dx}}{\lambda_0} = \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{dA_q}{dx}}{A_q} = \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{dA_{q-1}}{dx}}{A_{q-1}} = \ldots = \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{dA_0}{dx}}{A_0},$$

c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$R(y, x) = H(x) R_1(y)$$

et

$$\lambda_0 = H^{\frac{1}{2}}$$

à un facteur constant près. Si l'on pose

$$Y = \int \frac{\lambda_0\, dy}{\sqrt{R}} = \int \frac{dy}{\sqrt{R_1(y)}},$$

il vient

$$\frac{dY}{dx} = H^{\frac{1}{2}},$$

et l'équation s'intègre par deux quadratures

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R_1(y)}} = \int H^{\frac{1}{2}} dx.$$

Si l'intégrale de (1) est de la forme indiquée, l'équation (1) rentre donc nécessairement dans cette classe d'équations. Mais cette condition n'est pas suffisante. Il faut de plus (et il suffit) que les périodes de l'intégrale

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R_1(y)}}$$

se réduisent à deux.

Les seules équations

$$y'^2 = R[y, (x)]$$

dont l'intégrale générale ne prend autour des points critiques mobiles que n valeurs, le nombre ϖ n'étant pas nul, se déduisent d'une équation

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = k(x)\, dx,$$

par une transformation

$$u = \varphi(y) + \sqrt{R_1(y)}\, \psi(y),$$

φ, ψ, R_1 dépendant rationnellement de y et ne contenant pas x. Ceci s'applique notamment au cas de $p = 2$.

Remarquons, pour terminer, que le problème traité dans ce Chapitre renferme, comme cas particuliers, d'autres problèmes intéressants. Supposons, par exemple, qu'on veuille *reconnaître si l'intégrale d'une équation* (1) *donnée est une fonction n'admettant qu'un point critique mobile* (y_1, x_1). Quand la relation

$$F[y, y', (x)] = 0$$

est algébrique en y, y', x, le lieu des points critiques des intégrales est une certaine courbe algébrique

$$\varphi(y_1, x_1) = 0,$$

et, comme y_1, x_1 sont bien déterminés pour chaque intégrale particulière, on a

$$y_1 = \rho\,[y, y', (x)],$$
$$x_1 = \rho_1[y, y', (x)],$$

c'est-à-dire qu'il y a une correspondance rationnelle entre la courbe (1) et la courbe $\varphi = 0$. Si donc le genre de cette dernière n'est pas nul, les résultats précédents s'appliquent au problème. Notamment, quand le lieu des points critiques (y_1, x_1) d'une équation (1) est une courbe algébrique de genre plus grand que 1, *on reconnaît algébriquement si l'intégrale n'a qu'un point critique mobile, et l'équation s'intègre alors algébriquement*.

En général, le lieu des points (y_1, x_1) se compose de deux courbes, à savoir le lieu des points où y' devient infinie et le lieu des points où deux valeurs de y' se permutent. Chaque intégrale a au moins un point critique mobile sur chacune de ces deux courbes. Si, par hypothèse, elle n'en possède qu'un, il faut que ces deux courbes se réduisent à une seule, indécomposable.

Quand ces deux courbes sont distinctes, on peut chercher à reconnaître si l'intégrale n'a que deux points critiques mobiles. Plus généralement, quand le lieu des points (y_1, x_1) se compose de q courbes C distinctes, on peut chercher à reconnaître si l'intégrale n'a que q points critiques mobiles. Il suffit qu'une des courbes C ne soit pas du genre o pour que notre théorie trouve son application.

Sous une forme un peu différente, il est loisible de rechercher si l'intégrale n'a qu'un point de rebroussement variable ou qu'un point variable où la tangente soit verticale, ou encore qu'un seul point de contact avec chacune de ses courbes enveloppes, etc.

Il est facile de multiplier les questions de cette nature, où deux quantités α, β liées par une relation algébrique connue sont bien déterminées pour chaque intégrale particulière.

Chaque fois que l'équation entre (α, β) ne sera pas de genre o, les théorèmes démontrés plus haut interviendront d'eux-mêmes.

Par exemple, cherchons si l'équation

$$(1)\qquad \left(y - \frac{8}{27}y'^3\right)^2 = \frac{\left(x - \frac{4}{9}y'^2\right)^3 + 1}{\left(x - \frac{4}{9}y'^2\right)^2 + 1}$$

a pour intégrale une fonction dont un seul point critique soit mobile. Le lieu des points critiques (y_1, x_1) se trouve être

$$y_1^2 = \frac{x_1^3 + 1}{x_1^2 + 1}.$$

Si nous formons les substitutions rationnelles qui permettent de passer de la courbe précédente (de genre 2) à la courbe (1), nous voyons que la substitution

$$x_1 = \left[(x) - \frac{4}{9}y'^2\right],$$
$$y_1 = \left[y - \frac{8}{27}y'^3\right]$$

définit, quand on y laisse x_1, y_1 constants, une intégrale de (1).

Cette intégrale ainsi calculée algébriquement peut s'écrire

$$y - \beta = (x - \alpha)^{\frac{3}{2}}, \qquad \text{avec} \qquad \beta^2 = \frac{\alpha^3 + 1}{\alpha^2 + 1}.$$

6. Il me reste à dire quelques mots de l'extension de la méthode aux équations différentielles d'ordre supérieur. Quand l'intégrale générale d'une équation

$$F[y'', y', y(x)] = 0$$

ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, on peut mettre, nous l'avons dit, d'une infinité de manières, l'intégrale sous la forme

$$\alpha = R\,[y'', y', y, (x)],$$
$$\beta = R'[y'', y', y, (x)],$$
$$\gamma = R''[y'', y', y, (x)],$$

et choisir ces intégrales, liées par la relation

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

de telle façon que toute autre intégrale

$$\delta = R''[y'', y', y, (x)]$$

soit une fonction *uniforme* de α, β, γ. Dans ces égalités, les R, R', ... désignent des fonctions uniformes de y'', y', y, fonctions qui ne sont pas nécessairement des fonctions rationnelles. Pour qu'il en soit ainsi, il faut de plus que l'intégrale y contienne algébriquement les constantes y_0, y'_0, y'_0, ou, ce qui revient au même, que l'intégrale n'ait pas de points essentiels mobiles. Ce sont de telles équations que nous nous bornons à étudier. Nous considérons, en définitive, les équations du second ordre (1), dont l'intégrale y dépend algébriquement de constantes y_0, y'_0.

Si le genre ϖ de la relation

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

entre les constantes intégrales est supérieur à l'unité, les théorèmes que nous avons indiqués plus haut sur les transformations rationnelles des surfaces permettent d'intégrer l'équation (1) ou de la ramener à des équations plus simples.

Deux cas sont à distinguer, suivant que S rentre ou non dans le troisième groupe de surfaces défini au Chapitre II.

Quand S est du premier ou du second groupe, l'intégrale de (1) s'obtient algébriquement.

Elle est définie, en effet, par une des transformations rationnelles de S en la surface (1), et l'on sait calculer algébriquement toutes les surfaces S distinctes qui correspondent rationnellement à (1), en même temps que toutes les lois de correspondance.

Quand S est une surface du troisième groupe, une intégrale première est de la forme

$$\frac{\Sigma \mu_i Q'_i[y'', y', y'(x)]}{\Sigma \lambda_i Q'_i[y'', y', y'(x)]} = \text{const.}$$

(les notations étant les mêmes qu'au Chapitre II).

Une fois les $\lambda_i(x)$, $\mu_i(x)$ déterminés par cette condition, il reste à intégrer une équation du premier ordre, pour laquelle la relation entre les constantes intégrales est sûrement de genre 1.

On arrive à démontrer ainsi que l'intégration de l'équation (1) se ramène à la recherche d'une intégrale particulière quelconque d'une équation linéaire et homogène, suivie d'une quadrature. L'ordre de l'équation linéaire (qui le plus souvent est égal à 1) ne peut dépasser $p + p_1 - 1$ [p et p_1 étant les deux genres de (1)] :

En définitive, proposons-nous le problème suivant :

Reconnaître si l'intégrale de (1) *dépend algébriquement des constantes et correspond à une relation entre les constantes intégrales de genre* $\varpi > 1$.

On détermine algébriquement s'il en est ainsi, et l'équation s'intègre alors soit algébriquement, soit par une quadrature, ou bien on ramène l'équation aux équations linéaires.

Cette méthode n'est qu'une extension de celle qu'a employée M. Picard (1), pour étudier les intégrales uniformes ou à points critiques fixes des équations (1), comme notre méthode pour intégrer les équations du premier ordre est une extension de celle de M. Poincaré.

CHAPITRE IV.

DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DONT L'INTÉGRALE GÉNÉRALE N'ADMET QU'UN NOMBRE DONNÉ n DE DÉTERMINATIONS SE PERMUTANT AUTOUR DES POINTS CRITIQUES MOBILES.

1. Les résultats que nous avons obtenus dans le Chapitre précédent ne s'appliquent jamais au cas où le genre p de l'équation différentielle

$$F[y, y', (x)] = 0 \tag{1}$$

est nul. Nous allons maintenant traiter un problème dont la solution embrasse les équations (1) de genre quelconque, en particulier les équations de premier degré en y'

$$y' = R[y, (x)].$$

(1) E. Picard, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*loc. cit.*).

Nous nous proposons de *reconnaître si l'intégrale générale de* (1) *n'admet qu'un nombre donné n de valeurs se permutant autour des points critiques mobiles.*

Rappelons-nous, pour traiter cette question, les propositions générales établies dans le premier Chapitre :

Si l'intégrale est de l'espèce indiquée, elle se laisse définir par la relation

$$(2)\quad X[y, y_0, y'_0, (x)] = y^n + y^{n-1}R_{n-1}[y_0, y'_0, (x)] + \ldots + R^0[y_0, y'_0, (x)] = 0;$$

dans cette égalité, R_i désigne une fonction rationnelle de y_0, y'_0; quant à y_0, y'_0, ce sont les valeurs pour x_0 de l'intégrale particulière et de sa dérivée; ces valeurs vérifient la condition

$$(1)' \qquad F[y_0, y'_0, (x_0)] = 0.$$

Les R_i, R_j d'une part, les R_i, $\frac{dR_i}{dx}$ d'autre part, sont liés par des relations algébriques qu'on forme en éliminant y_0, y'_0 entre ces quantités et l'équation (1). Par exemple, si R_i dépend effectivement de la constante d'intégration (y_0, y'_0), on peut donner à ces équations la forme

$$\begin{aligned} R'_i &= \varphi[R_i, (x)], \\ R_1 &= \Psi_1[R_i, (x)], \\ R_2 &= \Psi_2[R_i, (x)], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_n &= \Psi_n[R_i, (x)], \end{aligned}$$

les Ψ, φ étant algébriques en R_i.

Quand n est le nombre exact des branches de y qui se permutent autour des points critiques mobiles, nous savons qu'il n'existe qu'un système distinct de telles relations.

Les fonctions $R_i(x)$ ont leurs points critiques fixes. D'autre part, on a

$$R_i = R_i[y_0, y'_0, (x)] = y_0'^{m-1}A_i^1[y_0, (x)] + y_0'^{m-2}A_i^2[y_0, (x)] + \ldots + A_i^m[y_0, (x)].$$

Dans cette égalité, les quantités A_i^j sont des fonctions rationnelles en y_0. Nous allons chercher à déterminer une limite supérieure du degré en y_0 des deux polynômes dont A_i^j est le quotient.

Pour cela, nous ferons usage d'une seconde forme de l'intégrale de l'équation (1)

$$f[y, y_0, (x)] = 0,$$

dans laquelle f est, comme l'on sait, un polynôme de degré mn par rapport à chacune des lettres y et y_0. Supposons qu'on ait ramené à l'unité le coefficient de y^{mn} dans

$$f[y, y_0, (x)];$$

désignons par f_1 ce que devient f; nous pouvons écrire

$$f_1[y, y_0, (x)] = y^{mn} + \mathrm{B}_1[y_0, (x)]y^{mn-1} + \ldots + \mathrm{B}_{mn}[y_0, (x)] = 0.$$

Dans cette équation, les B_i^j sont des fractions rationnelles dont les deux termes sont au plus de degré mn en y_0.

Les mn valeurs de y qui correspondent à chaque valeur de y_0 se décomposent de la manière suivante en m groupes formés chacun de n valeurs :

A chaque valeur de y_0 correspondent m valeurs de y'_0. Soient z_1, z_2, ..., z_m ces m valeurs. A chaque système de valeurs de (y_0, y'_0) correspondent les déterminations d'une même intégrale. Appelons R_i^1, R_i^2, ..., R_i^m les valeurs de R_i qui correspondent à y_0; en d'autres termes, posons

$$\mathrm{R}_i^j = \mathrm{R}_i[y_0, z_i, (x)].$$

Posons encore

$$\begin{aligned}\mathrm{X}_1 = \mathrm{X}[y, y_0, z_1, (x)] &= y^n + y^{n-1}\mathrm{R}_1^1 + y^{n-2}\mathrm{R}_2^1 + \ldots + \mathrm{R}_n^1 \\ &= y^n + y^{n-1}(\mathrm{A}_1^1 z_1^{m-1} + \ldots + \mathrm{A}_1^m) + \ldots + (\mathrm{A}_n^1 z_1^{m-1} + \mathrm{A}_n^2 z_1^{m-1} + \ldots + \mathrm{A}_n^m)\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}\mathrm{X}_2 = \mathrm{X}[y, y_0, z_2, (x)] &= y^n + y^{n-1}\mathrm{R}_1^2 + y^{n-2}\mathrm{R}_2^2 + \ldots + \mathrm{R}_n^2 \\ &= y^n + y^{n-1}(\mathrm{A}_1^1 z_2^{m-1} + \ldots + \mathrm{A}_1^m) + \ldots + (\mathrm{A}_n^1 z_2^{m-1} + \ldots + \mathrm{A}_n^m),\end{aligned}$$

. . . .

On a identiquement

$$f_1[y, y_0, (x)] = \mathrm{X}_1 \mathrm{X}_2 \ldots \mathrm{X}_n. \tag{3}$$

Les coefficients des puissances de y sont, dans le premier membre de l'équation (3), des fonctions de y_0 qui sont au plus de degré mn en y_0; dans le second membre, ce sont des fonctions entières des quantités A_i^j, et les coefficients de ces fonctions sont eux-mêmes des fonctions symétriques de z_1, z_2, ..., z_m, et, par suite, s'expriment rationnellement en fonction des coefficients α de l'équation

$$F[y_0, z, (x_0)] = z^m + \alpha_1[y_0, (x_0)]z^{n-1} + \ldots + \alpha_m[y_0, (x_0)] = 0.$$

On peut aisément, pour chaque valeur donnée de m, calculer ces fonctions symétriques en fonction des α. Elles sont de la forme

$$S = \sum z_i^{\mu} z_j^{\mu'} \ldots,$$

chacun des nombres μ, μ', ...; étant au plus égal à $(m-1)$ il nous suffit, pour le but que nous nous proposons d'atteindre, de calculer une limite supérieure de leur degré en y_0. D'après la théorie des fonctions symétriques, une telle fonction S est une fonction entière des quantités α, et cette fonction entière est au plus de degré $m(m-1)$ par rapport aux α. Si n' désigne le degré le plus élevé auquel y_0 figure dans l'expression des quantités α, les quantités S seront au plus de degré

$$\nu = m(m-1)n'$$

en y_0.

Dans chacun des deux membres de l'équation (3), le coefficient de y^{mn} est égal à l'unité. En égalant respectivement les coefficients de $y^{mn-1}, y^{mn-2}, \ldots, y^0$ dans le premier membre de l'équation (3), aux coefficients de $y^{mn-1}, y^{mn-2}, \ldots, y^0$ dans le second membre, nous obtenons mn équations, liant entre elles les mn quantités A_i^j. Chacune de ces équations peut s'écrire sous la forme suivante

$$(4) \qquad \sum_k S_k[y_0, (x_0)]\varphi_k(A_1^1, \ldots A_i^j \ldots A_n^m) = B[y_0, (x)],$$

les φ_k désignant des fonctions entières des A_i^j.

Parmi ces équations, les $(m-1)$ premières sont respectivement de degré $1, 2, \ldots, (m-1)$ par rapport aux A_i^j. Toutes les autres sont de degré m.

Par rapport aux quantités y_0, les coefficients S_k sont au plus de degré ν, et les quantités B sont au plus de degré mn.

D'ailleurs, le système des équations (4) n'est jamais indéterminé, sinon on pourrait trouver, pour chaque valeur de y_0 et de x, une infinité de valeurs des quantités A_i^j vérifiant les équations (4), et la quantité

$$f_1[y, y_0, (x)],$$

qui est un polynôme en y, serait, par suite, décomposable d'une infinité de manières en un produit

$$X_1 X_2 \ldots X_m$$

de m facteurs de degré n en y, ce qui est absurde.

Si donc, entre les équations (4), nous éliminons $(mn-1)$ des quantités A_i^j, nous obtenons une relation de la forme

$$G[A_i^j, y_0, (x)] = 0,$$

qui, pour chaque valeur de x, lie à y_0 la quantité A_i^j restante.

G est un polynôme en A_i^j et en y_0. Son degré en A_i^j est au plus égal à

$$1.2.3\ldots m m^{m(n-1)}.$$

Mais, ce qui nous importe, c'est de trouver une limite supérieure de son degré en y_0.

Pour l'obtenir, nous remarquerons que toutes les équations (4) sont au plus de degré N par rapport aux variables A_i^j et y_0, N désignant le plus grand des deux nombres

$$mn \quad \text{et} \quad m+\nu = m(n'+1) - n'.$$

Le degré auquel figure y_0 dans le polynôme

$$G[A_i^j, y_0, (x)]$$

est donc au plus égal à

$$P = N^{mn}.$$

J'ajoute que, si $(m+\nu)$ est supérieur à mn, cas auquel N est égal à $(m+\nu)$, on peut remplacer N par un nombre moindre, pour les $(m-1)$ premières équations, ce qui conduit à prendre pour P une valeur moindre.

La fraction rationnelle $A_i^j\,[y^0, (x)]$ doit donc vérifier une équation

$$G[A_i^j, y_0, (x)] = 0,$$

où y figure au plus au degré P.

Mettons G sous forme entière par rapport aux A_i^j et aux y_0 : le numérateur et le dénominateur de A_i^j doivent diviser les deux coefficients extrêmes du polynôme en A_i^j. *Les deux termes de la fraction rationnelle* $A_i^j(y_0, x)$ *sont donc au plus de degré* P *en* y_0.

Cette limite supérieure de P est très élevée : dans chaque cas particulier, on pourra l'abaisser notablement. Pour deux nombres donnés, m et n, sans rien supposer sur l'équation (1), on obtiendrait une limite très inférieure à la précédente en opérant ainsi.

On forme facilement, pour m et n donnés, les quantités

$$\varphi_k(\ldots A_i^j \ldots)$$

qui figurent dans les relations (4). Entre ces équations (4) on effectue l'élimination de $(mn-1)$ des quantités A_i^j en traitant les quantités $S_k(y_0)$ comme des constantes quelconques. On arrive ainsi à une relation où figure celle des quantités A_i^j que l'on n'a pas éliminée, A_1^1 par exemple, et les quantités S_k, B_i. On connait une limite supérieure des degrés des S_k, B_i en y_0; on connaîtra, par suite, une limite supérieure du degré en y_0 de l'équation qui donne A_1^1; cette limite est aussi celle du degré des deux termes de A_1^1 ; on opérera de même pour toutes les quantités A_i^j.

La nouvelle limite ainsi trouvée vaut pour toutes les équations de degré m en y', dont l'intégrale prend n valeurs autour des points critiques mobiles. Pour une équation différentielle particulière donnée, en exprimant les S_k en fonction de y_0, on abaissera encore cette limite.

Mais le fait important qu'il nous faut retenir pour l'instant, c'est qu'*on peut toujours déterminer une limite supérieure* P *du degré auquel* y_0 *figure dans les* A_i^j. Il suffit de prendre

$$P = N^{mn};$$

N désigne le plus grand des deux nombres

$$mn \quad \text{et} \quad m(n'+1)-n';$$

n' est le degré en y de l'équation (1) pour $x = x_0$.

Revenons maintenant à l'étude des quantités

$$R_i[y_0, y'_0, (x)] = y'^{m-1}_0 A_i^1[y_0, (x)] + \ldots + A_i^m[y_0, (x)].$$

D'après ce qui précède, elles sont au plus de degré P en y_0.

Si donc on élimine y_0 et y'_0 entre les trois relations

$$\begin{gathered} R_i = R_i[y_0, y'_0, (x)], \\ \frac{dR_i}{dx} = \frac{d}{dx} R_i[y_0, y'_0, (x)], \\ F[y_0, y'_0, (x_0)] = 0, \end{gathered}$$

l'équation algébrique et entière en R, $\frac{dR}{dx}$ à laquelle on parvient est au plus de degré Q_i, Q_i se calculant aussitôt à l'aide de P.

De même, si l'on élimine y_0, y'_0 entre les relations

$$\begin{gathered} R_i = R_i[y_0, y'_0, (x)], \\ R_j = R_j[y_0, y'_0, (x)], \\ F[y_0, y'_0, (x_0)], \end{gathered}$$

on obtient une équation

$$\psi_{i,j}[R_i, R_j, (x)] = 0,$$

dont le premier membre est de degré au plus égal à Q_{ij}.

Nous pouvons donc écrire un système de relations

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi[R_i, R'_i, (x)] = 0, \\ \psi_{i,1}[R_i, R_1, (x)] = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \psi_{i,n}[R_i, R_n, (x)] = 0, \end{array} \right.$$

où les polynômes φ, $\psi_{i,j}$ ont des degrés respectivement égaux à Q_i, $Q_{i,j}$.

Exprimons, d'une part, que l'équation

$$\varphi = 0$$

a ses points critiques fixes ; d'autre part, que les équations

$$\psi_{i,j}[R_i, R_j, (x)] = 0$$

définissent un système de fonctions $R_1(x), R_2(x), \ldots, R_n(x)$ en fonction de R_i et de x dont les points critiques sont également fixes; enfin que le système des fonctions R_1, R_2, ..., R_n, transporté dans la relation

$$y^n + R_{(n-1)} y^{n-1} + \ldots + R_0 = 0,$$

définit l'intégrale de l'équation (1). Nous obtenons ainsi un certain nombre de conditions algébriques entre les coefficients indéterminés $a(x)$, $b(x)$, ... des polynômes φ, ψ et leurs dérivées $\frac{da}{dx}$, $\frac{db}{dx}$, ...

On reconnaît, par des opérations purement algébriques, si ces conditions sont compatibles. Quand elles le sont, par quelles opérations sont déterminés des coefficients $a(x)$, $b(x)$, ...?

Rappelons-nous que, si n valeurs se permutent effectivement autour des points critiques mobiles, il ne saurait exister deux systèmes distincts de relations (5). Pour éviter toute ambiguïté, supposons que, dans $\psi_{i,j}$, le terme de degré le plus élevé en R_i, R_j ait pour coefficient l'unité, de même que dans φ le terme de degré le plus élevé en R_i, R'_i. Dans ces conditions, on a

$$\psi_{i,j}[R_i, R_j, (x)] = \Pi_i^p[R_i, R_j, (x)],$$

p étant un certain entier et Π_i une fonction de R_i, R_j, (x) bien déterminée, entière et irréductible par rapport à R_i, R_j. Il en est de même pour φ.

D'après cela, si les conditions qui assujettissent les a_i sont compatibles et indéterminées, c'est que l'intégrale des (1) prend un nombre n' de valeurs inférieur à n autour des points critiques mobiles. Il faut donc essayer les nombres n' plus petits que n.

Quand les conditions sont compatibles et déterminées, il peut arriver que plusieurs systèmes a, b, ..., les vérifient. Mais il suffit de chercher les polynômes φ, Ψ_{ij} de degré minimum. Leurs coefficients s'obtiennent par des opérations linéaires, puisqu'il ne saurait exister qu'un seul système de tels polynômes.

Nous arrivons ainsi à ce théorème :

On reconnaît par des opérations purement algébriques si l'intégrale d'une équation (1) *donnée ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles. Dans ce cas, l'équation se ramène, par des opérations également linéaires, à une équation différentielle dont les points critiques sont fixes.*

A cette dernière équation

$$\varphi\left[R, \frac{dR}{dx}, (x)\right] = 0$$

s'appliquent les résultats de M. Poincaré. Si son genre p' est nul, elle se ramène à une équation de Riccati

$$(6) \qquad t' = Mt^2 + Nt + P;$$

s'il est égal à l'unité, elle s'intègre par une quadrature; s'il est supérieur à 1, elle s'intègre algébriquement.

Il faut de plus que les fonctions R_j de x, définies par les relations

$$\psi_{i,j}[R_i, R_j, (x)] = 0,$$

n'aient elles-mêmes que des points critiques fixes. Cette condition met souvent en évidence des intégrales de l'équation de Riccati (6), quand $p' = 0$.

Si R_j, en effet, ne s'exprime pas rationnellement en fonction de R_i, R'_i, par suite en fonction de t, elle admet, pour chaque valeur de x, au moins deux points critiques

$$t_0 = K_0(x), \qquad t_1 = K_1(x),$$

et t_0, t_1 doivent être intégrales de (6) pour que R_j n'ait pas de points critiques variables.

Quand les R_j ont trois points critiques distincts

$$t_0 = K_0, \qquad t_1 = K_1, \qquad t_2 = K_2,$$

l'équation de Riccati s'intègre algébriquement.

Si tous les R_j n'ont que deux points critiques qui coïncident, on peut toujours supposer que ces valeurs critiques t_0, t_1 sont 0 et ∞ (car t n'est défini qu'à une transformation homographique près), et l'équation (6) se réduit à

$$\frac{t'}{t} = N(x),$$

d'où

$$t = CN_1(x).$$

Si l'on pose $C^{\frac{1}{p}} = \gamma$, p étant un entier convenablement choisi, toutes les fonctions R_j dépendront rationnellement de C

$$R_i = \rho_i[C, (x)].$$

C'est ce qui a lieu de soi-même quand, p' étant nul, tous les R_j s'expriment rationnellement en fraction de R_i, R'_i.

Une discussion analogue se présente dans le cas où $p' = 1$. Si tous R_j s'expriment rationnellement en R_i, R'_i, l'équation s'intègre par une quadrature, et son intégrale est de la forme

$$y^n + \rho_{n-1}(C, x) y^{n-1} + \ldots + \rho_0(C, x)$$
$$+ \sqrt{(1-C^2)(1-k^2C^2)}[r_{n-1}(C, x) y^{n-1} + \ldots + r_0(C, x)] = 0.$$

Au cas contraire, à un point critique de $R_j[R_i, (x)]$, [soit $R_i = a(x)$], correspond une intégrale de l'équation

$$\varphi[R, R', (x)] = 0,$$

qui s'intègre algébriquement.

En définitive, *l'intégrale de* (1), *quand elle prend un nombre donné* n *de valeurs autour des points critiques mobiles, s'obtient algébriquement, à moins qu'elle ne se laisse mettre dans l'une des deux formes suivantes*

$$y^n + \rho_{n-1}(C, x) y^{n-1} + \ldots + \rho^0(C, x)$$
$$+ \sqrt{(1-C^2)(1-k^2C^2)}[r_{n-1}(C, x) y^{n-1} + \ldots + r_0(C, x)] = 0$$

(*auquel cas elle se calcule par une quadrature*), *ou*

$$y^n + R_{n-1}(C, x) y^{n-1} + \ldots + R_0(C, x) = 0$$

(*auquel cas elle dépend de l'intégration d'une équation de Riccati*). Dans ces égalités, les ρ, r, R désignent des fonctions rationnelles de C.

Ajoutons que nous avons dirigé tout le calcul en nous servant de $R_i[y_0, y'_0, (x)]$. Il peut arriver que, dans l'intégrale cherchée, R_i ne dépende pas de (y_0, y'_0). Dans la pratique, il faudrait donner à i successivement les valeurs $i = 1$, $i = 2$, ..., $i = n$, et égaler, dans chaque calcul, à des fonctions de x indépendantes de la constante, les R_i avec lesquels on aurait fait l'essai infructueusement.

Un procédé plus symétrique et plus élégant consiste à introduire la fonction

$$r[y_0, y'_0, (x_0), (x)] = \Sigma a_i(x) R_i[y_0, y'_0, (x_0)(x)]$$

que nous avons considérée déjà dans le premier Chapitre. Nous savons déterminer une limite supérieure du degré auquel figure y_0 dans r, par suite une limite supérieure du degré en r et r' de l'équation

$$h[r, r', (x)] = 0,$$

qui est, comme nous le savons, *une relation entre les constantes ou fonctions intégrales*. Il faut d'abord que l'intégrale de cette équation ait ses points critiques fixes, quels que soient les $a_i(x)$. Cette condition remplie, les R_i sont liés à r par des relations

$$\psi_j[R_i, r, (x)] = 0$$

dont le degré ne peut dépasser une limite connue. Il suffit d'exprimer que, si l'on substitue les fonctions $R_i[r, (x)]$ dans l'équation

$$y^n + R_{n-1} + y^{n-1} + \ldots + R_0 = 0,$$

cette équation définit l'intégrale de (1). Dans $R_i[r, (x)]$, r représente l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$h[r, r'(x)] = 0.$$

Quand ces conditions sont remplies, si l'on a laissé aux a_i des valeurs quelconques, $R_1, R_2, \ldots, R_n$ s'expriment toujours rationnellement en r et r'.

D'après cela, *l'équation $h = 0$ et, par suite, l'équation* (1) *s'intègrent algébriquement quand le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales est supérieur à l'unité.*

Quand ce genre est égal à 1, *l'équation* (1) *s'intègre par une quadrature.*

Quand ce genre est nul, l'équation (1) *se ramène algébriquement à une équation de Riccati.*

Si l'on se reporte aux formes que prend l'intégrale générale dans ces deux cas, formes que nous avons étudiées dans le premier Chapitre, on voit que ces résultats ne diffèrent pas de ceux que nous avons obtenus tout à l'heure.

2. La méthode que nous venons d'exposer démontre d'une façon directe que la question posée au début de ce Chapitre se résout à l'aide d'un nombre limité d'opérations algébriques; mais les calculs auxquels elle conduit seraient la plupart du temps inextricables. Nous allons indiquer un moyen beaucoup plus rapide de résoudre le problème.

Quand l'intégrale y ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales peut être nul, égal à 1, ou plus grand que 1. Nous allons chercher à reconnaître successivement si l'intégrale de (1) est de l'espèce indiquée, ϖ étant d'abord supposé plus grand que l'unité, puis égal à l'unité, puis nul.

En premier lieu, si ϖ est plus grand que 1, on a

$$n = \frac{p-1}{\varpi - 1},$$

p désignant le genre de F. Comme nous l'avons déjà remarqué, n est un diviseur de $(p-1)$. Admettre que la relation entre les constantes intégrales est de genre plus grand que 1, c'est se donner par le point même une limite supérieure de n. Le moyen le plus simple de reconnaître si l'intégrale satisfait à ces conditions, c'est de suivre la marche indiquée au Chapitre III et de déterminer les courbes de degré $\varpi + 1$, qui correspondent rationnellement à (1).

Supposons maintenant que p soit égal à 0 ou à 1. Dans le premier cas, l'intégrale est définie par une relation

$$\text{(6)} \qquad G[y, \gamma, (x)] = P_n[\gamma, (x)]y^n + \ldots + P_0[\gamma, (x)] = 0,$$

où les P_i sont de degré m en γ, si m est le degré de F en y' (γ désigne une constante ou une fonction de x qui vérifie une équation de Riccati). Il existe une correspondance birationnelle entre

$$G[y, \gamma, (x)] = 0$$

et

$$F[y, y', (x)] = 0.$$

Remarquons à ce sujet que le genre d'une courbe de degré n en y et m en γ ne peut dépasser un certain nombre, facile à calculer pour m et n donnés. Si le genre p de (1) est supérieur à ce nombre, ϖ ne saurait être nul.

Par exemple, si $m = 2$, $n = 2$, ϖ étant nul, l'équation différentielle qui admet une intégrale de telle nature est nécessairement de genre nul ou égal à 1.

Dans le cas où $\varpi = 1$, on a

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} y^n + \rho_{n-1}(\gamma, x) y^{n-1} + \ldots + \rho_0[\gamma, (x)] \\ \quad + \sqrt{(1-\gamma^2)(1-k^2\gamma^2)}[r_{n-1}(\gamma, x) y^{n-1} + \ldots + r_0(\gamma, x)] \\ \qquad = Q[y, \gamma, (x)] + \sqrt{(1-\gamma^2)(1-k^2\gamma^2)}\, Q_1[y, \gamma, (x)] \end{cases}$$

et aussi

$$\text{(8)} \qquad G[y, \gamma, (x)] = P_{2n} y^{2n} + \ldots + P_0 = 0,$$

les P_i étant des polynômes en γ de degré m. Quant à γ, c'est une fonction de x qui vérifie l'équation

$$\frac{d\gamma}{dx} = N(x)\sqrt{(1-\gamma^2)(1-k^2\gamma^2)}.$$

Ceci rappelé, plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse où ϖ serait nul et servons-nous de l'équation (6) à laquelle il faut joindre la condition

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

L'intégrale est susceptible d'être mise sous la forme (6) d'une infinité de façons : toutes les équations (6) se déduisent de l'une d'entre elles par le changement

$$\gamma = \frac{a\gamma_1 + b}{a_1\gamma_1 + b_1},$$

a, b, a_1, b_1 étant des fonctions de x. Nous pouvons disposer de a, b, a_1, b_1 de façon que les coefficients de l'équation (6) satisfassent à trois conditions qui soient caractéristiques d'une équation (6), ou du moins d'un nombre fini de ces équations. Par exemple, nous pouvons astreindre les P_i à ces conditions que leurs trois racines $\gamma_0 = g(x)$, $\gamma_1 = h(x)$, $\gamma_2 = k(x)$, d'ordre de multiplicité le plus élevé, soient égales à 0, 1, 2. On cherche alors à déterminer les coefficients $A(x)$, $B(x)$, ... des P_i, ainsi que M, N, P, de façon que l'équation (6) définisse l'intégrale de (1). On obtient ainsi un certain nombre de relations qui, si elles sont compatibles, sont déterminées, et l'équation (1) se trouve alors ramenée algébriquement à une équation de Riccati.

Quand le genre p de (1) n'est pas nul, on peut simplifier les calculs en tenant compte de la correspondance birationnelle de (1) et (6), correspondance qui est une conséquence des conditions que nous venons d'énoncer. Si nous introduisons les intégrales abéliennes de première espèce relatives aux deux courbes, on doit avoir

$$\frac{P_i[y, \gamma, (x)]}{G'_\gamma} = \frac{\sum_{j=1}^{j=p} \lambda_j(x)\, P'_j[y, y', (x)]}{F'_y}.$$

Par exemple, si l'équation donnée est de la forme

$$y' = h[y, (x)] + H[y, (x)]\sqrt{R[y, (x)]},$$

l'équation (6) sera de la forme

$$(A_2\gamma^2 + A_1\gamma + A_0)y^n + \ldots + L_2\gamma^2 + L_1\gamma + L_0 = 0,$$

et γ devra s'exprimer rationnellement en y et $\sqrt{R[y, (x)]}$.

Quand le genre p de (1) est nul, on se sert de la transformation birationnelle

$$y = \varphi[t, (x)],$$
$$y' = \psi[t, (x)],$$

pour ramener l'équation à la forme

$$\frac{dt}{dx} = R[t, (x)], \tag{1'}$$

R étant rationnel en t. L'équation (6), relative à l'équation (1'), s'écrit

$$(A_1\gamma + A_0)t^n + (B_1\gamma + B_0)t^{n-1} + \ldots + L_1\gamma + L_0 = 0,$$

ou encore

$$\gamma = -\frac{A_0 t^n + B_0 t^{n-1} + \ldots + L_0}{A_1 t^n + \ldots + L_1}.$$

On peut disposer de la transformation homographique qu'il est loisible de faire subir à γ pour donner à γ la forme

$$\gamma = +\frac{a_0 t^n + b_0 t^{n-1} + \ldots + k_0 t}{t^{n-1} + b_1 t^{n-2} + \ldots + 1},$$

par exemple. Il faut déterminer les coefficients $a_0, b_0, \ldots, a_1, b_1, \ldots$ et M, N, P de façon qu'en remplaçant γ et t dans l'équation

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P,$$

celle-ci se transforme en l'équation (1'). Si la chose est possible, elle n'est possible que d'une seule manière.

Remarquons que l'équation (1') n'est pas pleinement déterminée. On peut effectuer sur t une substitution homographique

$$t = \frac{\alpha t_1 + \beta}{\alpha_1 t_1 + \beta_1}.$$

Cette substitution, jointe au changement de variable $x = \varphi(x_1)$, est la plus générale qui conserve à l'équation (1′) sa forme, et aux intégrales y leur nombre de valeurs se permutant autour des points critiques mobiles.

Plus généralement, étant donnée une équation (1) quelconque, on se servira de la transformation birationnelle

$$y = \varphi[t, u, (x)],$$
$$y' = \psi[t, u, (x)],$$

avec

$$t = \varphi_1[y, y', (x)],$$
$$u = \psi_1[y, y', (x)],$$

pour ramener l'équation (1) à la forme la plus simple possible. Par exemple, si l'équation (1) est de l'espèce hyperelliptique, on commence par la ramener à la forme

$$(1'') \qquad y' = h[y, (x)] + k[y, (x)]\sqrt{R[y, (x)]};$$

la transformation homographique

$$y = \frac{\alpha y_1 + \beta}{\alpha_1 y_1 + \beta_1},$$

jointe au changement de variable $x = \varphi(x_1)$, n'altère pas la forme de l'équation (1″), et c'est encore dans ce cas la transformation la plus générale qui jouisse de cette propriété.

Il nous reste à examiner le cas où ϖ serait égal à 1. On peut employer une méthode calquée sur la méthode générale du § 1, et qui ne donne pas ici de calculs très compliqués.

On part de la relation (7), et l'on écrit que

$$Q^2 - (1 - \gamma^2)(1 - k^2\gamma^2)Q_1^2 \equiv \frac{G[y, \gamma, (x)]}{P_{2n}^2},$$

G étant de degré $2n$ en y.

On obtient ainsi $2n$ relations qui donnent aisément, pour une valeur déterminée de n, une limite supérieure du degré auquel γ figure dans l'équation (7).

Cette équation (7) dépend, comme nous l'avons dit dans le premier

Chapitre, d'une fonction $a(x)$ arbitraire. On peut à γ substituer γ_1 qui lui correspond par la formule

$$\gamma = \frac{\gamma_1\sqrt{(1-a^2)(1-k^2a^2)} + a\sqrt{(1-\gamma^2)(1-k^2\gamma^2)}}{1-k^2a^2\gamma_1^2}.$$

Disposons de cette fonction a de façon à imposer aux coefficients de l'équation (7) une condition qui la caractérise. La méthode est alors la même que plus haut; il faut déterminer les coefficients arbitraires de (7) et N de façon que l'intégrale de (1) soit définie par (7), quand γ satisfait à l'équation

$$\frac{d\gamma}{dx} = \mathrm{N}(x)\sqrt{(1-\gamma^2)(1-k^2\gamma^2)}.$$

Au lieu de se servir de l'équation (7), on pouvait employer l'équation (8). On se débarrasse de la fonction arbitraire $a\ (x)$ de la même manière, et l'on cherche à déterminer N et les coefficients de l'équation (8) dont le degré en y et γ est connu de façon que (8) définisse l'intégrale de (1). Quand les relations ainsi obtenues sont compatibles, l'équation (1) se trouve ramenée algébriquement à une quadrature. On pourra tenir compte de ce fait que la courbe (8) correspond à (1) par une transformation rationnelle du second ordre; si p' désigne son genre, on a

$$p' = 1 + \frac{p-1}{2},$$

et ses p' intégrales abéliennes de première espèce se transforment en p' intégrales de la courbe (1).

Mais une méthode au moins aussi simple est la suivante : puisque ϖ est égal à 1, l'intégrale de (1) satisfait, comme on sait, à une relation de la forme

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{\mathrm{R}(\alpha)}} = \mathrm{J}[y, y', (x)],$$

α désignant une constante, J une intégrale abélienne de première espèce attachée à la courbe (1). Nous sommes conduits ainsi à reconnaître si une intégrale abélienne de première espèce de (1) se ramène aux intégrales elliptiques par une transformation d'ordre n, problème classique, qu'on sait résoudre algébriquement de bien des façons. Une fois calculées, les intégrales J qui jouissent de cette propriété, on vérifie si l'une de ces intégrales satisfait à la condition

$$\frac{d\mathrm{J}(y, y', x)}{dx} = h(x),$$

quand on remplace y' par sa valeur tirée de (1), et, s'il en est ainsi, l'équation s'intègre par une quadrature.

Voici donc, pour des valeurs quelconques de ϖ, des méthodes de recherche de l'intégrale générale de (1) qui ne mèneront pas à des calculs rebutants.

3. D'après ce qui précède, on voit que, pour une équation (1) de degré donné en y et y', le nombre n des valeurs de y qui se permutent autour des points critiques mobiles ne peut dépasser une certaine limite, sans que le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales soit égal à 0 ou à 1. Pour $\varpi = 0$ et $\varpi = 1$, n peut être aussi grand que l'on veut; les méthodes employées ne fournissent aucun moyen de lui assigner, d'après l'équation donnée, une limite supérieure. C'est là d'ailleurs une difficulté analogue à celle qui se rencontre dans des questions beaucoup plus restreintes (par exemple dans le problème de la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales logarithmiques ou elliptiques), et cette difficulté n'a pas été surmontée jusqu'ici, même dans ces cas particuliers.

Quant aux points critiques fixes, nous n'en avons rien dit jusqu'ici. On peut se proposer de reconnaître si l'intégrale y ne prend qu'un nombre limité de valeurs autour de ces points fixes. Trois cas sont à distinguer, suivant que l'on a

$$\varpi = 0, \qquad \varpi = 1, \qquad \varpi > 1.$$

Supposons qu'on ait reconnu que l'intégrale prend n valeurs seulement autour des points critiques mobiles, et qu'on veuille l'étudier en tenant compte des points critiques fixes. Si ϖ est plus grand que 1, l'intégrale est donnée algébriquement en fonction des coefficients de (1) : la question est résolue.

Si $\varpi = 1$, il suffit d'étudier la fonction

$$r(x) = \Sigma a_i(x) R_i[y_0, y'_0, (x_0), (x)].$$

Elle vérifie une équation de genre 1, à points critiques fixes, qu'on ramène à la suivante

$$\frac{dt}{dx} = N(x)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}.$$

Pour que $t(x)$ ne prenne que μ valeurs autour des points critiques (fixes), il faut que, $N(x)$ n'admettant qu'un nombre fini de déterminations, l'intégrale

$$\int N(x)\,dx$$

n'ait au plus que deux périodes α, β, liées aux périodes ω et ω' de l'intégrale $\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ par les relations

$$\omega = \frac{m\alpha + m_1\beta}{m_2},$$

$$\omega' = \frac{m'\alpha + m'_1\beta}{m_2};$$

m, m_1, m', m'_1, m_2 sont des entiers.

Enfin, quand $\varpi = 0$, l'équation en r, r' se ramène à une équation de Riccati, par suite à une équation linéaire du second ordre.

Les conclusions de M. Poincaré, relatives aux équations du premier ordre dont l'intégrale générale est uniforme ou a ses points critiques fixes, subsistent donc pour des équations dont l'intégrale générale n'admet que n valeurs dans le plan ou autour des points critiques mobiles. L'intégrale, dans ces différents cas, est liée algébriquement aux coefficients de l'équation, ou en dépend par une quadrature, ou se ramène enfin aux transcendantes qu'introduisent les équations linéaires.

Les équations d'ordre supérieur les plus simples peuvent, au contraire, admettre pour intégrale générale des transcendantes uniformes (ou à n valeurs) essentiellement nouvelles. Les conclusions précédentes s'appliquent seulement aux équations dont l'intégrale y dépend algébriquement des y_0, y'_0, ... Soit, dans cette hypothèse particulière,

$F[y, y_0, y'_0, \ldots, (x)] = 0$ la relation algébrique irréductible qui définit l'intégrale. On ne sait plus déterminer une limite du degré de F en $y_0, y'_0, \ldots$. La méthode d'intégration développée dans ce Chapitre ne s'étend donc pas aux équations d'ordre supérieur.

CHAPITRE V.

APPLICATION DE LA MÉTHODE PRÉCÉDENTE AUX ÉQUATIONS DE LA FORME $y' = R[y, (x)]$.

1. Quand le genre de la relation

$$F[y', y, (x)] = 0$$

en y' et y est nul, une transformation birationnelle permet, comme nous l'avons dit, de ramener l'équation différentielle à la forme

$$y' = R[y, (x)], \tag{1}$$

où R désigne une fraction rationnelle en y.

Si l'intégrale générale d'une telle équation n'admet que n valeurs se permutant autour des points critiques mobiles, elle peut s'écrire

$$\frac{M[y, (x)]}{N[y, (x)]} = C,$$

M et N étant deux polynômes en y de degré n et C une constante; ou bien encore

$$\left\{\begin{aligned} & y^n + y^{n-1}\frac{(\alpha_{n-1}C + \beta_{n-1})}{\alpha_n C + \alpha_n} + y^{n-2}\frac{(\alpha_{n-2}C + \beta_{n-2})}{\alpha_n C + \beta_n} + \ldots + \frac{\alpha_0 C + \beta_0}{\alpha_n C + \beta_n} \\ & \qquad \equiv y^n + \gamma_{n-1} y^{n-1} + \gamma_{n-2} y^{n-2} + \ldots + \gamma_1 y + \gamma_0 = 0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

L'un au moins des coefficients $\gamma_i(x)$ dépend de la constante C. Pour fixer les idées, admettons que γ_0 dépende de C. (Pour échapper d'ailleurs au cas exceptionnel où cela n'aurait pas lieu, il suffirait de remplacer y par $y+k$, k représentant une constante quelconque.) Dans cette hypothèse, exprimons C en fonction de γ_0; on voit que

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= A_1 \gamma_0 + B_1, \\ \gamma_2 &= A_2 \gamma_0 + B_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \gamma_{n-1} &= A_{n-1}\gamma_0 + B_{n-1}. \end{aligned}$$

L'équation (2) devient ainsi

$$(3) \qquad y^n + (A_{n-1}\gamma_0 + B_{n-1})y^{n-1} + \ldots + (A_1\gamma_0 + B_1)y + \gamma_0 = 0,$$

ou encore

$$(4) \qquad \gamma_0 = -\frac{y^n + B_{n-1}y^{n-1} + B_{n-2}y^{n-2} + \ldots + B_1 y}{A_{n-1}y^{n-1} + \ldots + A_1 y + 1}.$$

Dans cette égalité les A et B désignent des fonctions de x bien déterminées, et γ_0 une fonction qui satisfait à une équation de Riccati

$$(5) \qquad \gamma_0' = m\gamma_0^2 + n\gamma_0 + p.$$

Si l'intégrale de l'équation (1) est de la forme (2), il existe un système de fonctions A_i, B_j, m, n, p, et un seul, telle que cette intégrale soit définie par l'équation (3). Il en résulte qu'étant donnée une équation (1), on reconnaît à l'aide d'opérations linéaires si l'on peut déterminer un pareil système, et, dans ce cas, le système s'obtient lui-même à l'aide d'opérations linéaires.

Ceci rappelé, voici quelle doit être la marche du calcul : on différentie l'équation (4) par rapport à x, et on remplace γ_0 et γ_0' par leurs valeurs en y et y' dans l'équation (5). En identifiant l'equation ainsi obtenue avec l'équation donnée, on forme un certain système de relations qui doivent être compatibles, et qui, si elles sont compatibles, sont parfaitement déterminées. L'équation se trouve alors ramenée, par des opérations purement algébriques, à une équation de Riccati.

Inversement, ce procédé permet de former toutes les équations (1)

$$y' = R[y,(x)] - \frac{P[y,(x)]}{Q[y,(x)]},$$

dont l'intégrale prend seulement n valeurs autour des points critiques mobiles (n étant donné). On voit que, dans le cas plus général, P est de degré $2n$, et Q de degré $2n-2$. Les $(4n-1)$ coefficients de R s'expriment en fonction des $(2n+1)$ fonctions arbitraires A_i, B_j, m, n, p, et de leurs dérivées premières. Ces coefficients satisfont donc à $(2n-2)$ relations différentielles. Pour calculer ces relations, on élimine entre les $(4n-1)$ valeurs des coefficients de R les $(2n-2)$ dérivées des A_i, B_j qui figurent seules. Il reste ainsi $(2n+1)$ égalités, d'où l'on peut tirer les A_i, B_j, m, n, p en fonction des coefficients de R, et, en portant ces expressions dans les valeurs de $\frac{dA_i}{dx}$, $\frac{dB_j}{dx}$, on forme $(2n-2)$ relations où figurent les coefficients de R et leurs dérivées premières, ou, d'une manière plus précise, $(2n+1)$ fonctions de ces coefficients et dérivées de $(2n-2)$ de ces fonctions.

Mais il peut arriver que l'équation (1), formée en partant des équations (4) et (5), soit telle que P et Q aient un ou plusieurs facteurs communs en y. (En particulier, P et Q peuvent avoir leurs premiers termes nuls à la fois.) Soit λ le nombre de facteurs communs à P et Q. L'équation correspondante est alors de la forme

$$y' = \frac{a_{(2n-\lambda)}y^{(2n-\lambda)} + a_{(2n-\lambda-1)}y^{(2n-\lambda-1)} + \ldots + a_0}{b_{(2n-\lambda-2)}y^{(2n-\lambda-2)} + \ldots + b^0}. \tag{6}$$

Les deux coefficients $a_{(2n-\lambda)}$, $b_{(2n-\lambda-2)}$ ne sont pas nuls à la fois; j'ajoute qu'aucun d'eux n'est nul dans l'équation la plus générale de la classe étudiée. Car, si une équation (6) appartient à cette classe, la nouvelle équation obtenue en faisant le changement de fonction

$$y = \frac{h(x)y_1 + k(x)}{h_1(x)y_1 + k_1(x)}$$

jouit de la même propriété, et les coefficients correspondants $a_{(2n-\lambda)}$, $b_{(2n-\lambda-2)}$ sont différents de zéro.

Les $(4n-2\lambda-1)$ coefficients distincts de l'équation (6) s'expriment en fonction des $(2n+1)$ fonctions A_i, B_j, m, n, p, liées par les λ conditions nécessaires pour que P et Q aient λ facteurs communs. Ces conditions renferment les dérivées premières $\frac{dA_i}{dx}$, $\frac{dB_j}{dx}$. Il résulte de là que les coefficients de l'équation (6) satisfont à $(2n-\lambda-2)$ relations, où figurent ces coefficients et leurs dérivées jusqu'à un ordre d'autant plus élevé que λ est plus grand.

En définitive, soient une équation (1) donnée, μ le degré du numérateur de R, μ' celui du dénominateur. Désignons par ν le plus grand des nombres μ et $\mu'+2$, et mettons l'équation sous la forme

$$(1) \qquad y' = \frac{a_\nu y^\nu + a_{\nu-1} y^{\nu-1} + \ldots + a_0}{b_{\nu-2} y^{\nu-2} + b_{\nu-3} y^{\nu-3} + \ldots + b_0},$$

en introduisant, s'il est nécessaire, des coefficients nuls. Pour que l'intégrale d'une telle équation ne prenne que n valeurs autour des points critiques mobiles, il faut et il suffit que les $(2\nu-1)$ coefficients a_i, b_j satisfassent à un système de $(\nu-2)$ relations, $(\alpha)_n^\nu$, bien déterminé pour chaque valeur de n et de ν. Le nombre n ne peut être inférieur à $\frac{\nu}{2}$; si $n=\frac{\nu}{2}$, les relations $(\alpha)_n^\nu$ dépendent des coefficients de y' et de leurs dérivées premières; de plus, ces coefficients s'expriment explicitement à l'aide de $(\nu-1)$ fonctions indépendantes. Si n dépasse $\frac{\nu}{2}$, les dérivées des a_i, b_j figurent dans les relations $(\alpha)_n^\nu$ avec un indice d'autant plus élevé que $(2n-\nu)$ est plus grand; les coefficients a_i, b_j s'expriment à l'aide de $(2n+1)$ fonctions liées par $(2n-\nu)$ équations différentielles, qu'on ne sait pas intégrer en général.

Si les coefficients d'une équation (1) vérifient le système $(\alpha)_n^\nu$, l'équation se ramène linéairement à une équation de Riccati, par une transformation (3).

Pour appliquer à un exemple simple les remarques générales qui précèdent, étudions les équations (1) dont l'intégrale ne prend que deux valeurs autour des points critiques mobiles. L'intégrale peut s'écrire

$$(7) \qquad y^2 + (B - A\gamma)y - \gamma = 0,$$

ou encore

$$\gamma = \frac{y^2 + By}{Ay+1},$$

γ vérifiant l'équation

$$\gamma' = m\gamma^2 + n\gamma + p.$$

Si l'on remplace γ et γ' en fonction de y et y', il vient

$$(8) \quad y' = \frac{my^4 + (2mB + nA + A')y^3 + [mB^2 + n(1+AB) + pA^2 + A'B - AB']y^2 + (nB^2 + 2Ap - B')y + p}{Ay^2 + 2y + B}.$$

L'équation sous sa forme la plus générale peut donc s'écrire

$$(1)' \qquad y' = \frac{a_4 y^4 + 4a_3 y^3 + 6a_2 y^2 + 4a_1 y + a_0}{b_2 y^2 + 2b_1 y + b_0} = \frac{P[y, (x)]}{Q[y, (x)]}.$$

Considérons d'abord les équations telles que P et Q n'aient pas de facteur commun (en particulier, telles que a_4 et b_2 ne soient pas nuls à la fois).

Les sept rapports des coefficients a_i, b_j s'expriment en fonction de A, B, m, n, p de la manière suivante:

$$\frac{b_2}{b_1} = \mathrm{A}, \qquad \frac{b_0}{b_1} = \mathrm{B}, \qquad \frac{a_4}{b_1} = m, \qquad \frac{a_0}{b_1} = p,$$

$$4a_3 = \frac{2a_4 b_0}{b_1} + nb_2 + \frac{b'_2 b_1 - b_2 b'_1}{b_1},$$

$$6a_2 = \frac{a_4 b_0^2}{b_1^2} + \frac{n}{b_1}(b_1^2 + b_0 b_2) + \frac{a_0 b_2^2}{b_1^2} + \frac{b'_2 b_0 - b'_0 b_2}{b_1},$$

$$4a_1 = \frac{nb_0^2}{b_1} + \frac{2a_0 b_2}{b_1} + \frac{b'_1 b_0 - b'_0 b_1}{b_1}.$$

Si nous égalons les trois valeurs de n, déduites de ces dernières équations, nous trouvons les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (1)' jouisse de la propriété énoncée. Ces conditions sont les suivantes :

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} & b_0^2(b_1^2 + b_0 b_2)(4a_3 b_1 - 2a_4 b_0 + b_2 b'_1 - b_1 b'_2) \\ & = b_0^2 b_2 [6a_2 b_1^2 - a_4 b_0^2 - a_0 b_2^2 + b_1(b'_0 b_2 - b_0 b'_2)] \\ & = b_1 b_2 (b_1^2 + b_0 b_2)(4a_1 b_1 - 2a_0 b_2 + b'_0 b_1 - b'_1 b_0). \end{aligned} \right.$$

Si les coefficients a_i, b_j vérifient ces relations, l'équation (1)' se ramène, par la transformation

$$\gamma = \frac{b_1 y^2 + b_0}{b_2 y + b_1},$$

à l'équation

$$\gamma' = \frac{a_4}{b_1}\gamma^2 + \frac{1}{b_1 b_2}(4a_3 b_1 - 2a_4 b_0 + b_2 b'_1 - b'_2 b_1)\gamma + \frac{a_0}{b_1}.$$

Le calcul précédent suppose que γ dépend de la constante d'intégration. Les conditions (9) sont néanmoins générales; il serait aisé de le voir directement en écrivant l'intégrale ainsi

$$y^2 + \gamma_1(x) y + C(x) = 0,$$

γ_1 vérifiant l'équation

$$\gamma_1' = m\gamma_1^2 + n\gamma_1 + p.$$

Mais, plus simplement, il suffit de remarquer que, si une équation (1)′ satisfait aux conditions (9), l'équation obtenue en remplaçant y par $y_1 + k$ jouit de la même propriété.

Observons à ce sujet que, dans l'équation (8), le coefficient de y au dénominateur n'est jamais nul. Le cas où b_1 serait nul dans (1)′ correspond au cas où γ ne renfermerait pas de constante. Si, en effet, on exprime γ_1 et γ_1' en y et y', le dénominateur de $R[y, (x)]$ dans l'équation (1)′ ainsi obtenue est $y^2 - C$.

Étudions maintenant les équations (1)′, telles que P et Q aient un facteur commun et un seul. (Ils n'en sauraient admettre deux, autrement l'équation serait une équation de Riccati.) Dans cette hypothèse, le numérateur de y' dans l'équation (8) doit s'annuler identiquement, si l'on y remplace y par une des quantités

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - AB}}{A},$$

d'où une condition entre m, n, p, A, B, A′, B′, et l'équation (1)′ s'écrit

$$(1)'' \qquad y' = \frac{a_3 y^3 + 3a_2 y^2 + 3a_1 y + a_0}{b_1 y + b_0},$$

les a, b s'exprimant en fonction des quantités m, n, p, A, B, A′, B′, liées par la condition précédente. Inversement, en tenant compte de cette condition, on peut calculer m, n, A, B, A′, B′ à l'aide des cinq rapports $\frac{a_i}{b_j}$ et de p. En écrivant que $A' = \frac{dA}{dx}$, $B' = \frac{dB}{dx}$, on forme deux relations où figurent a_i, b_j, p et leurs dérivées premières. L'élimination de la fonction p conduit à une équation unique portant sur les a_i, b_j et leurs dérivées jusqu'au second ordre *au plus*. En réalité, $\frac{dp}{dx}$ n'intervient pas, et la condition finale est du premier ordre par rapport aux a_i, b_j. Mais on voit que le calcul ainsi conduit serait déjà pénible et deviendrait impraticable pour des équations plus compliquées. En outre, certaines particularités ne se trouveraient pas mises en évidence, celles-ci par exemple que les équations $(1)''$ de la classe qui nous occupe s'intègrent toujours par quadratures. Pour rendre les calculs plus simples et plus élégants, nous allons introduire ici une transformation dont nous avons déjà dit un mot, et qui permet de ramener les équations (1) à des formes réduites sur lesquelles leurs propriétés se laissent mieux apercevoir.

2. Soit une équation

$$y' = \mathrm{R}[y, (x)] = \frac{\mathrm{P}[y, (x)]}{\mathrm{Q}[y, (x)]}, \tag{1}$$

dans laquelle nous effectuons le changement de variable et de fonction

$$y = \frac{hy_1 + h_1}{ky_1 + k_1}, \qquad x = \varphi(x_1), \tag{2}$$

h, h_1, k, k_1 étant des fonctions de x_1. Si l'intégrale de (1) ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, l'intégrale de la nouvelle équation

$$y'_1 = \mathrm{R}_1[y_1, (x_1)] \tag{1$'$}$$

jouit de la même propriété, et réciproquement. Nous avons remarqué d'ailleurs, dans le Chapitre précédent, que la substitution (2) est, pour les équations (1), la plus générale qui conserve cette propriété des intégrales.

Si donc les coefficients de l'équation (1) satisfont aux conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale générale soit de l'espèce indiquée, ces conditions seront encore vérifiées par les coefficients de $(1)'$, et réciproquement. Autrement dit, ces conditions ne sont pas altérées par la substitution (2). Pour l'objet que nous poursuivons, il nous est donc loisible de nous servir de cette substitution pour ramener à certaines formes particulières toutes les équations (1) qui se déduisent l'une de l'autre par une telle substitution. Une fois connues les propriétés d'une équation ainsi réduite, il est aisé d'en déduire les propriétés des équations qui lui correspondent par la transformation (2) la plus générale. Nous sommes ainsi conduit à étudier les simplifications que peut apporter dans une équation (1) la substitution (2).

Écrivons d'abord l'équation (1)′ sans rien supposer sur les coefficients h, h_1, k, k_1, φ. Si μ désigne le degré P, μ' celui de Q, cette équation est de la forme

$$\frac{Ay_1' + By_1^2 + Cy_1 + D}{(ky_1 + k_1)^2} = \frac{(ky_1 + k_1)^{\mu'} P'[y_1, (x_2)]}{(ky_1 + k_1)^{\mu} Q'[y_1, (x_2)]},$$

P′ et Q′ représentant des polynômes en y_1 de degré μ et μ'; c'est-à-dire qu'on a, en appelant ν le plus grand des nombres μ et $\mu' + 2$,

$$(1)' \qquad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{a_\nu^1 y_1^\nu + a_{\nu-1}^1 y_1^{\nu-1} + \ldots + a_0}{b_{\nu-2}^1 y^{\nu-2} + b_{\nu-3}^1 y^{\nu-3} + \ldots + b^0}.$$

Les coefficients a_ν^1, $b_{\nu-2}^1$ ne sont nuls que pour des transformations (2) particulières. Ils ne sauraient être nuls à la fois; autrement, P′ et Q′ auraient un facteur commun, par suite, P et Q, et la fraction $\frac{P}{Q}$ ne serait pas irréductible.

Pour abréger, nous appellerons le nombre ν *degré* du coefficient différentiel de (1), et nous dirons que deux équations (1) sont de la même *classe*, quand elles se correspondent par une substitution (2). Pour que deux équations soient de la même classe, il faut évidemment que leurs coefficients différentiels soient de même *degré*. Écrivons ces deux équations sous leur forme la plus générale

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_\nu y^\nu + a_{\nu-1} y^{\nu-1} + \ldots + a_0}{b_{\nu-2} y^{\nu-2} + \ldots + b_0},$$

$$(1)' \qquad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{a_\nu^1 y_1^\nu + a_{\nu-1}^1 y_1^{\nu-1} + \ldots + a_0^1}{b_{\nu-2}^1 y^{\nu-2} + \ldots + b_0^1}.$$

En effectuant sur (1) une substitution (2) quelconque, et en égalant les coefficients de l'équation ainsi obtenue à ceux de (1)′, on a $(2\nu - 1)$ relations entre lesquelles on peut éliminer φ et les trois rapports des h, h_1, k, k_1; il reste ainsi $(2\nu - 5)$ équations liant les coefficients de (1) et (1)′ et qui sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations (1) et (1)′ soient de la même classe.

Les substitutions (2) forment un groupe : à ce groupe doivent correspondre des invariants, d'après la théorie générale de Sophus Lie. Il est aisé, d'ailleurs, de s'en rendre compte dans ce cas particulier de la manière suivante :

Faisons d'abord $x = x_1$ dans la substitution (2). Pour une valeur donnée de n, on peut alors éliminer, entre les $(2\nu - 1)$ relations dont nous venons de parler, les rapports des h, h_1, k, k_1. Les $(2\nu - 4)$ relations ainsi obtenues renferment les a_i, b_j, a_i^1, b_j^1 et leurs dérivées; écrivons-les de façon que chacune d'elles contienne une des lettres a_i^1, b_i^1 que ne contienne aucune autre.

Imaginons qu'on ait trouvé pour les équations (1) des formes canoniques telles qu'à toutes les équations d'une classe corresponde une équation canonique et une seule

$$\text{(3)} \qquad Y' = \frac{A_\nu Y^\nu + A_{\nu-1} Y^{\nu-1} + \ldots + A_0}{B_{\nu-2} Y^{\nu-2} + \ldots + B_0},$$

les A_i, B_j désignant des fonctions de X. Pour cela, nous disposons des quatre éléments arbitraires de la substitution (2), de façon que les A_i, B_j vérifient quatre conditions convenablement choisies. Si (3) est l'équation réduite qui correspond à (1), les rapports des A_i, B_j s'expriment en fonction des coefficients a_i, b_j,

$$\frac{A_i(X)}{B_j(X)} = F_{i,j}\left(\ldots, a_i, \ldots, b_j, \ldots, \frac{da_i}{dx}, \ldots\right),$$

et X est liée à x dans ces équations par la formule

$$X = \psi(x),$$

ψ dépendant aussi des a_i, b_j et de leurs dérivées. D'autre part, si l'équation (1)' est de la même classe que l'équation (1), on a également

$$\frac{A_i(X)}{B_j(X)} = F_{i,j}\left(\ldots, a_i^1, \ldots, b_j^1, \ldots, \frac{da_i^1}{dx}, \ldots, \frac{db_j^1}{dx}, \ldots\right)$$

avec

$$X = \psi\left(\ldots, a_i^1, \ldots, b_j^1, \ldots, \frac{da_i^1}{dx}, \ldots, \frac{db_j^1}{dx}, \ldots\right);$$

c'est-à-dire que les expressions $F_{i,j}$ et ψ sont des invariants. Ces $2n$

invariants ne sont pas distincts, puisque les $(2n-1)$ rapports $\frac{A_i}{B_j}$ sont liés par quatre relations. Nous mettons donc ainsi en évidence $(2n-4)$ quantités que n'altère pas le changement des a_i, b_j, x en a_i^1, b_j^1, x_1. Pour que les équations (1) et (1)′ soient de la même classe, il faut et il suffit qu'il existe une fonction $x=\varphi(x_1)$ vérifiant ces $(2n-4)$ conditions d'invariance. Il en résulte que les $(2n-4)$ invariants ainsi formés sont distincts : sinon il faudrait moins de $(2n-5)$ conditions pour exprimer que (1) et (1)′ se correspondent. D'autre part, un invariant quelconque s'exprimera en fonction des précédents et de leurs dérivées : sinon $(2n-4)$ conditions au moins seraient nécessaires pour que (1) et (1)′ fussent de la même classe. On le voit d'ailleurs directement en prenant l'équation sous la forme canonique : un invariant quelconque est une fonction des A_i, B_j, $\frac{dA_i}{dX}$, $\cdots$ et, par suite, une fonction des $(2n-4)$ invariants considérés.

Cherchons donc à déterminer de telles formes canoniques des équations (1). On peut, par exemple, procéder ainsi :

Mettons en évidence dans l'équation (1) les $(\nu-2)$ racines, simples ou confondues, du dénominateur $Q[y,(x)]$,

$$y'=\frac{P[y,(x)]}{(y-\alpha)^{\lambda}(y-\alpha_1)^{\lambda_1}\dots}=\frac{P[y,(x)]}{(y-\alpha)^{\lambda}q[y,(x)]}.$$

Soit α la racine d'ordre de multiplicité le plus élevé de Q; q est un polynôme en y de degré $\nu-\lambda-2$,

$$q=y^{\nu-\lambda-2}+b'_{(\nu-\lambda-3)}y^{\nu-\lambda-3}+\ldots+b'_0.$$

Posons d'abord

$$y-\alpha=\frac{1}{z}.$$

Il vient

$$z'=\frac{c_\nu z^\nu+c_{\nu-1}z^{\nu-1}+\ldots+c_0}{\gamma_{\nu-\lambda-2}z^{\nu-\lambda-2}+\gamma_{\nu-\lambda-3}z^{\nu-\lambda-3}+\ldots+\gamma_0}=\frac{S[z,(x)]}{T[z,(x)]}.$$

Les c_i, γ_j se calculent sans peine à l'aide des a_i, b_j. Si $P(\alpha)$, $P'(\alpha)$, ..., $q(\alpha)$, $q'(\alpha)$, ... représentent les polynômes P et q et leurs dérivées par rapport à y, où l'on fait $y=\alpha$, on a

$$c_\nu = -P(\alpha),\quad c_{\nu-1}=\frac{-P'(\alpha)}{1},\quad \ldots,\quad c_{\nu-\lambda+1}=\frac{-1}{1.2\ldots(\lambda-1)}P^{(\lambda-1)}(\alpha),$$

$$c_{\nu-\lambda}=\alpha' q(\alpha)-\frac{1}{1.2\ldots\lambda}P^{\lambda}(\alpha),\quad \ldots,$$

$$c_2=\frac{\alpha'}{1.2\ldots(\nu-\lambda-2)}q^{\nu-\lambda-2}(\alpha)-\frac{1}{1.2\ldots(\nu-2)}P^{\nu-2}(\alpha),$$

$$c_1=-\frac{1}{1.2\ldots(\nu-1)}P^{\nu-1}(\alpha),\quad c_0=-\frac{1}{1.2\ldots\nu}P^{\nu}(\alpha)$$

et

$$\gamma_{\nu-\lambda-2}=q(\alpha),\quad \gamma_{\nu-\lambda-3}=\frac{q'(\alpha)}{1},\quad \ldots,\quad \gamma_0=\frac{1}{1.2\ldots(\nu-\lambda-2)}q^{(\nu-\lambda-2)}(\alpha).$$

On peut remarquer que $c_0=-a_\nu$, et que $\gamma_0=1$; les coefficients c_ν, $\gamma_{\nu-\lambda-2}$ sont tous deux différents de zéro.

Introduisons maintenant le changement de fonction

$$z=t+A,$$

et déterminons A de façon qu'au numérateur de $\frac{dt}{dx}$ ne figure pas de terme en $t^{\nu-1}$, il faut pour cela et il suffit que

$$A=\frac{-c_{(\nu-1)}}{\nu c_\nu},$$

et l'équation en t s'écrit

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d_\nu t^\nu+d_{\nu-1}t^{\nu-1}+\ldots+d^0}{\delta_{(\nu-\lambda-2)}t^{(\nu-\lambda-2)}+\ldots+\delta_0};$$

Les d_i, δ_j s'expriment à l'aide des c_i, γ_j de la façon suivante :

$$d_0=S(A)-A'T(h),\quad \ldots,\quad d_{(\nu-\lambda-2)}=\frac{S^{\nu-\lambda-2}(A)}{1.2\ldots(\nu-\lambda-2)}-\frac{A'T^{\nu-\lambda-2}(A)}{1.2\ldots(\nu-\lambda-2)},$$

$$d_{\nu-\lambda-1}=\frac{1}{1.2\ldots(\nu-\lambda-1)}S^{\nu-\lambda-1}(A),\quad \ldots,\quad d_\nu=\frac{1}{1.2\ldots\nu}S^\nu(A)=c_\nu,$$

$$\delta_0=T(A),\quad \delta_1=\frac{T'(A)}{1},\quad \ldots,\quad \delta_{\nu-\lambda-2}=\frac{1}{1.2\ldots(\nu-\lambda-2)}T^{\nu-\lambda-2}(A)=\gamma_{\nu-\lambda-2}.$$

Faisons alors le nouveau changement de fonction

$$t=BY,$$

et déterminons B de façon qu'au numérateur de l'équation en Y, Y' ne figure pas de terme en $Y^{\nu-\lambda-1}$, c'est-à-dire, prenons

$$\frac{B'}{B} = \frac{d_{\nu-\lambda-1}}{\delta_{\nu-\lambda-2}}$$

ou

$$B = B_0 e^{\int \frac{d_{\nu-\lambda-1}}{\delta_{\nu-\lambda-2}} dx};$$

on a

$$\frac{dY}{dx} = \frac{D_\nu Y^\nu + D_{\nu-2} Y^{\nu-2} + \ldots + D_{\nu-\lambda} Y^{\nu-\lambda} + D_{\nu-\lambda-2} Y^{\nu-\lambda-2} + \ldots + D_0}{\Delta_{\nu-\lambda-2} Y^{\nu-\lambda-2} + \ldots + \Delta_0},$$

avec

$$D_\nu = B^\nu d_\nu, \quad \ldots, \quad D_{\nu-\lambda} = B^{\nu-\lambda} d_{(\nu-\lambda)},$$
$$D_{\nu-\lambda-2} = B^{\nu-\lambda-2}(B d_{\nu-\lambda-2} - B'\delta_{\nu-\lambda-3}), \quad \ldots,$$
$$D_1 = B d_1 - A'\delta_0, \quad D_0 = d_0$$

et

$$\Delta_{\nu-\lambda-2} = \delta_{\nu-\lambda-2} . B^{\nu-\lambda-1}, \quad \ldots, \quad \Delta_0 = \delta_0 . B.$$

Introduisons enfin le changement de variable $x = \varphi(X)$, et cherchons à rendre égaux les coefficients des termes de degré le plus élevé au numérateur et au dénominateur de $\frac{dY}{dX}$; il faut pour cela et il suffit que

$$dX = \frac{D_\nu(x)}{\Delta_{\nu-\lambda-2}(x)} dx;$$

cette relation peut encore s'écrire

$$dX = \frac{c_\nu}{\gamma_{\nu-\lambda-2}} B^{\lambda+1} dx = -\frac{P(\alpha)}{q(\alpha)} B_0^{\lambda+1} e^{\int_{x_0}^{x} \frac{d_{\nu-\lambda-1}}{d_{\nu-\lambda-2}} dx} dx.$$

Ce changement de variable ramène l'équation à la forme

$$(5) \quad \frac{dY}{dX} = \frac{J_\nu Y^\nu + J_{\nu-2} Y^{\nu-2} + \ldots + J_{\nu-\lambda} Y^{\nu-\lambda} + J_{\nu-\lambda-2} Y^{\nu-\lambda-2} + \ldots + J_0}{I_{\nu-\lambda-2} Y^{\nu-\lambda-2} + \ldots + I_0} = \frac{\sigma[Y,(X)]}{\tau[Y,(X)]}.$$

Dans cette équation, le dénominateur est d'un degré inférieur au moins de trois unités au degré du numérateur; il ne renferme aucune racine de multiplicité supérieure à λ. Au numérateur, les termes de degré $\nu - 1$ et $\nu - \lambda - 1$ sont déficients. Enfin les coefficients des termes de degré le plus élevé, au numérateur et au dénominateur, sont égaux.

Toutes les équations de la même classe sont susceptibles d'être ramenées à la même équation canonique (5); mais cette réduction est possible d'une infinité de manières; autrement dit, une infinité d'équations (5) appartiennent à la même classe. Tout d'abord, la racine α une fois choisie, les transformations mêmes que nous avons employées montrent qu'on peut remplacer Y par $\frac{Y_1}{B_0}$ et X par $B_0^{\lambda+1}(X_1+h)$, sans changer la forme de l'équation (5); B_0 et h sont des constantes. Cette substitution est d'ailleurs, parmi les substitutions

$$(2)' \qquad Y = KY_1 + K_1, \qquad X = \varphi(X_1),$$

la plus générale qui jouisse de cette propriété. Pour le voir, il suffit d'opérer cette substitution et d'exprimer que $J^1_{\nu-1}$ est nul (ce qui donne $k_1 = 0$), que $J^1_{\nu-\lambda-1}$ est nul $\left(\text{ce qui donne } k = \text{const.} = \frac{1}{B_0}\right)$, enfin que $\frac{J^1_\nu}{I^1_{\nu-\lambda-2}} = 1$ [ce qui donne $X = B_0^{\lambda+1}(X_1 + h)$].

Cherchons maintenant les substitutions (2) les plus générales

$$Y = \frac{ky + k_1}{y - C}, \qquad X = \varphi(x),$$

susceptibles de faire correspondre l'équation (1) à une équation (5). Ceci ne peut avoir lieu, comme on l'aperçoit aussitôt, que si C est racine d'ordre λ de l'équation $Q[y(x)] = 0$. Une fois cette racine choisie, soit $C = \alpha$, si l'on pose

$$z = \frac{1}{y - \alpha} \qquad \text{ou} \qquad y = \alpha + \frac{1}{z},$$

il vient

$$Y = \frac{ky + k_1}{y - \alpha} = k'z + k'_1,$$

et la réduction n'est plus possible que de la manière que nous avons indiquée.

Si donc m désigne le nombre des racines α d'ordre λ que renferme Q, il existera m formes distinctes de l'équation (5), correspondant à l'équation (1), et chacune d'elles dépend de deux constantes arbitraires, B_0 et h. Les coefficients J et I sont des fonctions à m valeurs des coefficients a_i, b_j de leurs dérivées et de deux constantes, et ces fonctions, ainsi que $\frac{dX}{dx}$, sont des invariants de la substitution (2). D'une manière plus précise, ces quantités sont racines d'une équation d'ordre m, dont les coefficients dépendent rationnellement des a_i, b_j, $\frac{da_i}{dx}$, etc., et aussi de deux constantes B_0 et h. Si l'on donne aux constantes B_0 et h des valeurs particulières, et qu'on remplace les a_i, b_j et x par les a_i^1, b_j^1 et x_1, ces coefficients gardent la même valeur, à condition de donner aux constantes des valeurs convenables.

Pour que deux équations (1) et (1)′ soient de la même classe, il faut et il suffit que toutes leurs formes réduites coïncident. Il suffit, pour cela, qu'une des formes réduites de (1) coïncide avec une des formes réduites de (1)′. Ceci revient à dire que les relations

$$J_k\left(\ldots, a_i, \ldots, b_j, \ldots, \frac{da_i}{dx}, \ldots\right) = J_k\left(\ldots, a_i^1, \ldots, b_j^1, \ldots, \frac{da_i^1}{dx_1}, \ldots\right),$$
$$I_l\left(\ldots, a_i, \ldots, b_j, \ldots, \frac{da_i}{dx}, \ldots\right) = I_l\left(\ldots, a_i^1, \ldots, b_j^1, \ldots, \frac{da_i^1}{dx_1}, \ldots\right),$$
$$\frac{P(\alpha)}{q(\alpha)} B^{\lambda+1} = \frac{P_1(\alpha_1)}{q_1(\alpha_1)} B_1^{\lambda+1}$$

sont vérifiées identiquement par une certaine fonction

$$x = \varphi(x_1).$$

[Ces relations sont au nombre de $2n-4$ dans le cas le plus général où $\lambda = 1$; si λ est quelconque, il faut ajouter à ces $(2\nu - 3 - \lambda)$ conditions les $(\lambda - 1)$ conditions exprimant que Q′ a une racine d'ordre λ, comme Q].

Nous obtenons ainsi pour les équations (1) des formes canoniques absolument analogues à celles qu'a introduites M. Appell dans l'étude de la transformation

$$(6) \qquad y = h(x_1) y_1 + h_1(x_1), \qquad x = \varphi(x_1).$$

L'équation de Riccati est la seule qui ne soit pas susceptible d'être ramenée à une forme telle que (5). On peut, et d'une infinité de manières, la réduire par une substitution (2) à l'équation

$$Y' = 0;$$

mais la détermination d'une quelconque de ces substitutions nécessite la connaissance d'une intégrale particulière de l'équation. Pour s'en rendre compte, il suffit de se rappeler que l'intégrale générale est donnée par la formule

$$\frac{hy + h_1}{ky + k_1} = \text{const.}$$

Pour toutes les valeurs de ν supérieures à 2, le procédé de réduction que nous avons indiqué s'applique. Soit $\nu = 3$, par exemple. L'équation la plus générale est

$$(7) \qquad y' = \frac{a_3 y^3 + a_2 y^2 + \ldots + a_0}{b_1 y + b_0};$$

si b_1 n'est pas nul, on l'écrit

$$y' = \frac{a_3 y^3 + a_2 y^2 + \ldots + a_0}{y - \alpha},$$

et, en posant

$$y - \alpha = \frac{1}{z},$$

il vient

$$z' = c_3 z^3 + 3 c_2 z^2 + 3 c_1 z + c_0,$$

avec

$$\begin{aligned} c_3 &= -(a_3 \alpha^3 + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0), \\ 3 c_2 &= \alpha' - 3 a_3 \alpha^2 - 2 a_2 \alpha - a_1, \\ 3 c_1 &= -3 a_3 \alpha - 2 a_2, \\ c_0 &= -a_3. \end{aligned}$$

Si b_1 est nul, cette première réduction se trouve faite d'elle-même. En suivant alors la même marche que plus haut, on ramène l'équation à la forme canonique

$$Y' = Y^3 + J(X),$$

J ayant la valeur suivante, déjà calculée par M. Appell,

$$
(8) \qquad J = \frac{c_0 c_3^2 - 3 c_1 c_2 c_3 + 2 c_2^3 + c_3 \dfrac{dc_2}{dx} - c_2 \dfrac{dc_3}{dx}}{c_3^3}\, e^{-9\int \frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_3}\, dx}
$$

et X est liée à x par la formule

$$
X = \int c_3\, e^{6\int \frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_3}\, dx}\, dx.
$$

J et X sont deux invariants de l'équation (7). On voit qu'ils s'expriment en fonction des a_i, b_j et de leurs dérivées premières et secondes. Si l'on désigne par J_1, X_1 ce que deviennent ces invariants quand on y remplace a_i, b_j, x par a_i^1, b_j^1, x_1, la condition nécessaire et suffisante pour que deux équations (7) soient de la même classe est qu'il existe une fonction $x = \varphi(x_1)$ vérifiant les deux identités

$$
J = J_1,
$$
$$
X = X_1.
$$

Cet invariant J a été déjà rencontré par M. Robert Liouville dans ses travaux sur l'équation (7).

Considérons de même le cas de $\nu = 4$,

$$
y' = \frac{a_4 y^4 + a_3 y^3 + a^2 y^2 + \ldots + a_0}{b_2 y^2 + b_1 y + b_0}.
$$

Les formes de réduction seront différentes suivant que le dénominateur a, ou non, ses racines distinctes. Dans la première hypothèse, l'équation canonique s'écrit

$$
\frac{dY}{dX} = \frac{Y^4 + J_1 Y + J_0}{Y + I_0};
$$

dans la seconde

$$
\frac{dY}{dX} = Y^4 + J_2 Y^2 + J_0.
$$

Les invariants J et I se calculent aussitôt à l'aide des formules générales que nous avons établies précédemment. Nous nous dispenserons d'écrire ces égalités, dont l'établissement ne présente ni difficulté ni intérêt. Le plus simple est, dans chaque exemple particulier, de former directement ces invariants, en suivant la marche ordinaire de la réduction.

Citons encore les équations canoniques, qui correspondent aux valeurs de ν,

$$\nu = 5, \qquad \nu = 6.$$

Pour $\nu = 5$, il existe trois types d'équations canoniques, suivant que le dénominateur de y' n'a que des racines simples, ou admet soit une racine double, soit une racine triple. Ces trois types sont

$$Y' = \frac{Y^5 + J_2 Y^2 + J_1 Y + J_0}{Y^2 + I_1 Y + I_0},$$

$$Y' = \frac{Y^5 + J_3 Y^3 + J_1 Y + J_0}{Y + I_0},$$

$$Y' = Y^5 + J_3 Y^3 + J_2 Y^2 + J_0.$$

Pour $\nu = 6$, les formes réduites sont les suivantes :

$$Y' = \frac{Y^6 + J_3 Y^3 + J_2 Y^2 + J_1 Y + J_0}{Y^3 + I_2 Y^2 + I_1 Y + I_0},$$

$$Y' = \frac{Y^6 + J_4 Y^4 + J_2 Y^2 + J_1 Y + J_0}{Y^2 + I_1 Y + I_0},$$

$$Y' = \frac{Y^6 + J_4 Y^4 + J_3 Y^3 + J_1 Y + J_0}{Y + I_0},$$

$$Y' = Y^6 + J_4 Y^4 + J_3 Y^3 + J_2 Y^2 + J_0.$$

3. On peut se servir de ces équations canoniques et des invariants I et J pour reconnaître les équations (1), qu'une substitution (2) ramène à des formes intégrables. Mais ceci nous entraînerait hors du sujet. Remarquons d'ailleurs que, la substitution $y = \alpha + \frac{1}{z}$ une fois effectuée, nous ne faisons plus subir à y que des transformations linéaires, et je renvoie au Mémoire déjà cité de M. Appell pour le développement des propriétés de cette transformation.

Il convient de signaler toutefois une classe d'équations qui joue un rôle particulier vis-à-vis de la transformation (2) : je veux parler des équations (1) qui admettent un groupe infinitésimal de transformations (2).

On connaît un grand nombre de telles équations : les équations homogènes, les équations à coefficients constants, l'équation de Riccati. Pour cette dernière, en effet, l'intégrale générale y est donnée en fonction d'une intégrale particulière par l'égalité

$$y = \frac{h(x, C)\, y_1 + h_1(x, C)}{k(x, C)\, y_1 + k_1(x, C)},$$

et cette égalité définit une transformation (2) infinitésimale de l'équation en elle-même.

Nous allons nous servir des formes réduites (5) pour déterminer toutes les classes d'équations qui admettent un tel groupe de transformations. Il nous suffit, pour cela, de trouver toutes les équations canoniques qui jouissent de cette propriété. Soit donc

$$Y_1 = \frac{h(X)\, Y + h_1(X)}{k(X)\, Y + k_1(X)}, \qquad X_1 = \psi(X),$$
$$Y_2 = \frac{h^1(X)\, Y + h_1^1(X)}{k^1(X)\, Y + k_1^1(X)}, \qquad X_2 = \psi^1(X)$$

deux substitutions du groupe qui transforme une équation (5) en elle-même. Ceci n'est possible, comme nous l'avons remarqué, que si $-\frac{k_1}{k}$, $-\frac{k_1^1}{k^1}$ sont racines d'ordre λ de $\tau[Y, (X)]$. Si les deux substitutions sont deux substitutions voisines, $\frac{k_1}{k}$ doit être égal à $\frac{k_1^1}{k^1}$, et Y_1 est lié à Y_2 par la formule

$$Y_1 = HY_2 + H_1,$$

avec

$$X_1 = \chi(X_2).$$

Il en résulte que l'équation (5) reste inaltérée pour un tel groupe de transformations. Mais les seules substitutions (2)' qui conservent à (5) sa forme sont, comme nous l'avons démontré,

$$Y = \frac{Y_1}{B_0}, \qquad X = B_0^{\lambda+1}(X_1 + h).$$

Les coefficients I_k, J_l deviennent, après cette substitution,

$$J^1_{\nu-2}(X_1) = B_0^2 J_{\nu-2}[B_0^{\lambda+1}(X_1+h)],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$J^1_0(X_1) = B_0^{\nu} J_0[B_0^{\lambda+1}(X_1+h)],$$

$$I^1_{\nu-\lambda-3}(X_1) = B_0 I_{\nu-\lambda-3}[B_0^{\lambda+1}(X_1+h)],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$I^1_0 = B_0^{\nu-\lambda-2} I_0[B_0^{\lambda+1}(X_1+h)].$$

Par hypothèse, ces coefficients doivent rester les mêmes quand on remplace B_0 et h par des constantes qui satisfont à une certaine relation. Cette relation peut être résolue, par rapport à h,

$$h = G(B_0).$$

Autrement, les I, J ne changeraient pas quand on remplace X par $X+h$, h étant quelconque, et l'équation serait à coefficients constants. Nous sommes conduit ainsi à chercher des fonctions I, J qui satisfont à une relation fonctionnelle telle que

$$f(X) \equiv B_0^p f[B_0^{\lambda+1}(X+h)],$$

ou encore, en posant $B_0^{\lambda+1} = C$, $\dfrac{p}{\lambda+1} = q$,

$$f(X) = C^q f[C(X+h)].$$

Soit

$$f(X) = u, \qquad X = F(u).$$

L'équation fonctionnelle équivaut à la suivante :

$$C(X+h) = F\left(\frac{u}{C^q}\right),$$

d'où, en différentiant par rapport à u,

$$C\frac{dX}{du} = F'\left(\frac{u}{C^q}\right)\frac{1}{C^q},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dX}{du} = F'\left(\frac{u}{C^q}\right)\frac{1}{C^{q+1}},$$

quel que soit C.

Laissons u constant ($u = 1$ par exemple) et faisons varier C; on voit que

$$F'\left(\frac{1}{C^q}\right)\frac{1}{C^{q+1}} = \text{const.} = \alpha.$$

Nous tirons de là

$$F(u) = \alpha u^{-\frac{q+1}{q}},$$

$$F(u) = \alpha u^{-\frac{1}{q}} + \alpha'$$

et enfin

$$u = \frac{1}{\alpha(X-\beta)^q},$$

α et β étant des constantes arbitraires. Cette fonction u satisfait en effet à l'équation

$$u(X) = C^q u[C(X+h)],$$

quel que soit C, si h vérifie la condition

$$h = \frac{\beta(1-C)}{C}.$$

Il en résulte, pour les fonctions I et J, les valeurs

$$\begin{aligned}
J_{\nu-2} &= (X-\beta)^{-\frac{2}{\lambda+1}}\alpha_{\nu-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
J_0 &= (X-\beta)^{-\frac{\nu}{\lambda+1}}\alpha_0,\\
I_{\nu-\lambda-3} &= (X-\beta)^{-\frac{1}{\lambda+1}}\alpha'_{(\nu-\lambda-3)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
I_0 &= (X-\beta)^{\nu-\lambda-2}\alpha'_0.
\end{aligned}$$

Les α, α' désignent des constantes, ainsi que β, qui est le même pour tous les I, J, puisque ceux-ci doivent rester invariants pour les mêmes transformations.

Dans ces conditions, l'équation (5) admet le groupe des substitutions

$$Y = \frac{Y_1}{B_0}, \qquad X = B_0^{\lambda+1}X_1 + \beta(1 - B_0^{\lambda+1}).$$

Si nous posons

$$(X-\beta)^{-\frac{1}{\lambda+1}} = \xi,$$

l'équation

$$\frac{dY}{d\xi} = R[Y, (\xi)]$$

est telle que son coefficient différentiel ne change pas quand on y remplace Y par CY, ξ par Cξ : c'est donc une fonction homogène, de degré zéro. La substitution

$$Y = t\xi, \qquad \xi = e^{\xi},$$

ramène l'équation à une équation dont les coefficients sont constants par rapport à ξ.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante : les équations (1) qui admettent un groupe infinitésimal de transformations (2) se ramènent, par une telle transformation, aux équations homogènes (ou aux équations à coefficients constants). Cette réduction s'opère à l'aide de quadratures.

L'équation de Riccati fait seule exception à ce théorème : on peut encore la ramener à l'équation homogène

$$\frac{dY}{dX} = 0;$$

mais cette réduction exige la connaissance d'une intégrale particulière de l'équation.

Ce point établi, proposons-nous de reconnaître si une équation (1) donnée numériquement correspond, par une transformation (2), à une équation (1)' également donnée. On vérifie s'il en est ainsi à l'aide d'opérations purement algébriques. Quant aux substitutions (2) elles-mêmes, il n'en saurait exister qu'un nombre fini, et, par suite, elles s'obtiennent algébriquement, à moins que les équations ne rentrent dans la classe exceptionnelle que nous venons d'étudier. Dans ce dernier cas, elles s'intègrent par quadratures si ce ne sont pas des équations de Riccati.

4. Les équations canoniques que nous avons introduites dans le paragraphe précédent sont commodes pour certains calculs, parce

que trois termes sont nuls dans le coefficient différentiel. Mais elles présentent plusieurs désavantages : une infinité de ces formes réduites correspondent à la même classe d'équations

$$(1) \qquad y' = R[y, (x)].$$

Les invariants qu'elles définissent dépendent de deux constantes arbitraires, introduites par les deux quadratures qui figurent dans la substitution

$$(2) \qquad y = \frac{HY + H_1}{KY + K_1}, \qquad x = \varphi(X).$$

Supposons, par exemple, qu'on étudie une propriété qui soit caractéristique d'une classe d'équations (1). L'équation canonique de cette classe dépend de deux constantes arbitraires B_0 et h, et cette propriété se traduit par des relations différentielles entre les I, J, X, dont l'intégrale générale comporte ces deux constantes. C'est ainsi (pour fixer les idées) qu'une infinité d'équations de la forme

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + J(X)$$

appartiennent à la même classe, à savoir les équations

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + B_0^3 j(B_0^2 X + h).$$

Une propriété, caractéristique d'une classe de ces équations, se traduira donc par une relation

$$J = B_0^3 j(B_0^2 X + h),$$

j étant une fonction déterminée, ou encore par une équation différentielle

$$(3) \qquad f\left(\frac{d^2J}{dX^2}, \frac{dJ}{dX}, J\right) = 0.$$

Cette équation est d'une forme particulière; elle reste inaltérée si l'on substitue $\frac{Y}{B_0}$ à Y et $(B_0^2 X + h)$ à X. Or, les expressions $\frac{J'^3}{J^5}, \frac{J'J''}{J^4}$ gardent la même valeur dans cette substitution; posons donc

$$\frac{J'^3}{J^5} = u, \qquad \frac{J'J''}{J^4} = v,$$

et exprimons J' et J'' en u et v dans (3); la relation résolue par rapport à v devient

$$v = F(u, J);$$

elle doit rester la même si l'on change J en $B_0^3 J$; par suite, F est indépendant de J, et la relation (3) s'écrit

$$\frac{J''J'}{J^4} = F\left(\frac{J'^3}{J^5}\right). \tag{3'}$$

Si l'on pose $J'^3 = r$, $J^5 = t$, l'équation (3'), comme le remarque M. Appell, s'intègre par quadratures. On peut poser encore $\frac{J'^3}{J^5} = u$; il vient

$$\frac{dJ}{J} = 3F(u) - 5u.$$

Les quantités $\frac{J'J''}{J^4}$, $\frac{J'^5}{J^3}$, sont elles-mêmes des invariants des équations de la classe, et s'expriment sans constante ni quadrature à l'aide des coefficients de ces équations. La propriété caractéristique de la classe se traduit par une relation en termes finis entre ces deux invariants. Cette relation connue, l'équation canonique s'obtient par deux quadratures.

N'est-il pas possible de trouver des formes réduites où n'interviennent que des quantités telles que ces deux derniers invariants, qui ne comportent, par conséquent, ni constantes ni intégrations? Il suffit pour cela de définir des équations canoniques telles que la réduction d'une équation donnée à la forme canonique ne se puisse effectuer que d'une seule façon (ou d'un nombre fini de façons). Les équations canoniques d'une classe donnée seront, par le fait même, en nombre fini : la réduction s'opérera algébriquement.

Ces nouvelles formes réduites présenteront un autre avantage. Quand on a reconnu qu'une des équations canoniques introduites plus haut jouit d'une certaine propriété, par exemple est intégrable, on ne peut revenir à l'équation primitive (1) que par deux quadratures, qui souvent sont inutiles et s'éliminent dans le calcul. Par exemple, nous avons montré que les équations (1), qui admettent un groupe continu de substitutions (2), se ramènent, par deux quadratures, à une équation à coefficients constants. Leur intégration semble donc entraîner trois quadratures; en réalité, deux suffisent dans tous les cas, comme nous le verrons plus loin.

De même, cherchons à reconnaître sur une équation canonique (5), si l'intégrale générale n'admet que n valeurs autour des points critiques mobiles. Quand il en est ainsi, l'équation se ramène à une équation de Riccati. Mais, si nous repassons à l'équation (1) primitive, nous obtenons les coefficients de l'équation de Riccati correspondante à l'aide de deux quadratures. Or, nous savons que ces coefficients se calculent algébriquement. Ces exemples suffisent à mettre en évidence la nécessité d'éliminer ces quadratures parasites et justifient l'introduction des nouvelles formes canoniques.

De telles formes se peuvent définir d'une infinité de manières. Nous choisirons la suivante, dont l'utilité apparaîtra quand nous traiterons les problèmes que nous avons en vue dans ce Chapitre.

Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, si les deux équations

$$y' = \frac{P[y, (x)]}{Q[y, (x)]}, \tag{1}$$

$$y'_1 = \frac{P_1[y_1, (x_1)]}{Q_1[y_1, (x_1)]} \tag{1'}$$

sont de la même classe, les valeurs de y et de y_1 qui rendent infinies $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dy_1}{dx_1}$, se correspondent par la substitution

$$y = \frac{hy_1 + h_1}{ky_1 + k_1}, \qquad x = \varphi(x_1).$$

Cette substitution conserve le nombre et la multiplicité des racines des équations $Q = 0$, $Q_1 = 0$. Dans le cas particulier où $-\frac{k_1}{k}$ est une racine d'ordre λ de Q_1, une racine de Q d'ordre de λ est infinie : Q est de degré $\nu - \lambda - 2$.

Ceci posé, nous décomposerons les équations (1) en trois groupes :

Premier groupe. — Le dénominateur Q, de degré $\nu - 2$, a au moins trois racines distinctes.

Servons-nous de la transformation

$$y = \frac{h(x)\,Y + h_1}{k(x)\,Y + k_1},$$

de façon que les valeurs de Y qui correspondent à trois racines α, α_1, α_2 de Q soient trois constantes arbitrairement choisies, ∞, o et 1, par exemple. Il suffit pour cela de faire

$$h = k\alpha, \qquad h_1 = k_1\alpha_1, \qquad \frac{k_1}{k} = \frac{\alpha_2 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Nous choisissons pour α, α_1, α_2 les trois racines d'ordre de multiplicité le plus élevé

$$\lambda \geqq \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \lambda_i.$$

L'équation (1) devient

$$\frac{dY}{dx} = M(x)\frac{Y^\nu + c_\nu Y^{\nu-1} + \ldots + c_0}{Y^{\lambda_1}(Y-1)^{\lambda_2}(Y^{(\nu-\lambda-\lambda_1-\lambda_2-2)} + \ldots + \gamma_j Y^j + \ldots + \gamma_0)}.$$

Supposons d'abord que tous les c_i, γ_j ne soient pas des constantes, et soit $C(x)$ la première des quantités

$$c_{\nu-1}, \quad c_{\nu-2}, \quad \ldots, \quad c_0, \quad \gamma_{(\nu-\lambda-\lambda_1-\lambda_2-3)}, \quad \ldots, \quad \gamma_0$$

qui dépende de x. En posant $C(x) = X$, on ramène l'équation à une des formes

$$(4)\left\{\begin{aligned} &\frac{dY}{dX} = P(X)\frac{(Y^\nu + K_{\nu-1}Y^{\nu-1} + \ldots + XY^i + J_{i-1}Y^{i-1} + \ldots + J_1 Y + J_0)}{Y^{\lambda_1}(Y-1)^{\lambda_2}(Y^{(\nu-\lambda-\lambda_1-\lambda_2-2)} + \ldots + I_1 Y + I_0)} \\ &\text{ou} \\ &\frac{dY}{dX} = P(X)\frac{(Y^\nu + K_{\nu-1}Y^{\nu-1} + \ldots + K_1 Y + K_0)}{Y^{\lambda_1}(Y-1)^{\lambda_2}(Y^{(\nu-\lambda-\lambda_1-\lambda-2)} + \ldots + L_{i+1}Y^{i+1} + XY^i + I_{i-1}Y^{i-1} + \ldots + I_0)}.\end{aligned}\right.$$

Les K, L sont des constantes, les P, J, I des fonctions de X. Tous ces coefficients, ainsi que $X = C(x)$, s'expriment algébriquement à l'aide des a_i, α_j, $\frac{da_i}{dx}$, $\cdots$ et sont autant d'invariants de l'équation (1). Pour que deux équations soient de la même classe, il faut et il suffit qu'elles soient réductibles à la même forme (4). Si l'on veut encore, il faut et il suffit qu'il existe une fonction $x = \varphi(x_1)$ satisfaisant aux identités obtenues en égalant les invariants de (1) et de (1'), invariants mis en évidence sur l'équation (4). Dans le cas où $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, ces invariants sont au nombre de $2\nu - 4$, d'où $2\nu - 4$ identités. Si λ, λ_1, λ_2 sont quelconques, il faut joindre à ces $(2\nu - 1 - \lambda - \lambda_1 - \lambda_2)$ conditions les $(\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 - 3)$ conditions qui expriment que Q_1 a, comme Q, trois racines d'ordre λ, λ_1, λ_2 respectivement.

La réduction à la forme (4) n'est évidemment possible que d'un nombre fini de manières. Si m désigne le nombre des combinaisons de trois racines de Q, α_i, α_k, α_l, telles que α_i soit d'ordre λ, α_k d'ordre λ_1, α_l d'ordre λ_2, à la classe d'équations (1) considérée correspondent m équations canoniques (4). Les invariants (K, L, I, J, P, X) sont des fonctions algébriques à m valeurs des a_i, α_j, $\frac{da_i}{dx}$, ... Ce sont les racines d'une équation de degré m, dont les coefficients dépendent rationnellement des a_i, α_j, $\frac{da_i}{dx}$, ..., et définissent les invariants absolus de l'équation (1).

C'est ainsi, par exemple, que les équations

$$y' = \frac{a_5 y^5 + a_4 y^4 + \ldots + a_0}{(y-\alpha)(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)}$$

se ramènent à des équations de la forme

$$\frac{dY}{dX} = P(X)\frac{Y^5 + XY^4 + J_3Y^3 + J_2Y^2 + J_1Y + J_0}{Y(Y-1)}$$

ou

$$\frac{dY}{dX} = P(X)\frac{Y^5 + K_4Y^4 + XY^3 + J_2Y^2 + \ldots + J_0}{Y(Y-1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou enfin

$$\frac{dY}{dX} = P(X)\frac{Y^5 + K_4Y^4 + \ldots + K_1Y + X}{Y(Y-1)}.$$

Les coefficients de ces équations se calculent aisément à l'aide des a_i, α_j. A une classe de telles équations correspondent six formes réduites (4).

Les équations (4) ne sauraient admettre de groupe continu de transformation (2); autrement la réduction de (1) à une forme (4) s'effectuerait d'une infinité de manières.

Mais cette réduction suppose que dans l'équation en Y et x les coefficients c_i, γ_j ne soient pas tous constants. Si l'on se trouve dans ce cas exceptionnel, en posant

$$dX = M(x)\,dx,$$

on ramène l'équation à avoir ses coefficients constants.

Ceci nous montre que l'équation (1) admet alors un groupe continu de substitutions (2), et, de plus, qu'elle s'intègre à l'aide de deux quadratures portant respectivement sur une fonction de x et une fonction de Y.

Deuxième groupe. — Le dénominateur $Q[y, (x)]$ n'a que deux racines distinctes

$$y' = \frac{P[y, (x)]}{(y-\alpha)^{\lambda}(y-\alpha_1)^{\lambda_1}} \qquad (\lambda + \lambda_1 = \nu - 2,\ \lambda \geqq \lambda_1).$$

En posant

$$y = \frac{\alpha y_1 + \alpha_1}{y_1 + 1},$$

on ramène l'équation à la suivante

$$y_1' = \frac{P_1[y_1, (x)]}{y_1^{\lambda_1}} = M(x)\frac{(y_1^{\nu} + c_{\nu-1}y_1^{\nu-1} + \ldots + c_0)}{y_1^{\lambda_1}};$$

c_0 est différent de zéro. Faisons ensuite

$$y_1 = AY,$$

et déterminons A de façon que, dans la nouvelle équation, le coefficient de Y^{ν} soit égal au terme constant du numérateur; il suffit pour cela que

$$A^{\nu} = c_0.$$

L'équation ainsi obtenue s'écrit

$$\frac{dY}{da} = N(x)\frac{(Y^{\nu} + D_{\nu-1}Y^{\nu-1} + \ldots + D_1 Y + 1)}{Y^{\lambda_1}}.$$

Soit $C(x)$ le premier des coefficients

$$D_{\nu-1}, \quad D_{\nu-2}, \quad \ldots, \quad D_1$$

qui dépende de x. Si l'on fait $X = C(x)$, il vient

$$\frac{dY}{dX} = P(X)\frac{(Y^\nu + K_{\nu-1}Y^{\nu-1} + \ldots + K_{i+1}Y^{i+1} + XY^i + J_{i-1}Y^{i-1} + \ldots + J_1 Y + 1)}{Y^{\lambda_1}}, \tag{5}$$

les K désignant des constantes, les J des fonctions de X. Ces quantités, ainsi que P et $X(x)$, sont des invariants de (1).

C'est ainsi que l'équation

$$y' = \frac{a_4 y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0}{(y-\alpha)(y-\alpha_1)}$$

se ramène à l'une des équations

$$\frac{dY}{dX} = P(X)\frac{Y^4 + XY^3 + J_2 Y^2 + J_1 Y + 1}{Y}$$

ou

$$\frac{dY}{dX} = P(X)\frac{Y^4 + K_3 Y^3 + XY^2 + J_1 Y + 1}{Y},$$

ou enfin

$$\frac{dY}{dX} = P(X)\frac{Y^4 + K_3 Y^3 + K_2 Y^2 + XY + 1}{Y}.$$

De même, l'équation

$$y' = \frac{a_5 y^5 + a_4 y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0}{(y-\alpha)^2 (y-\alpha_1)}$$

correspondra à l'une des formes canoniques

$$\frac{dY}{dX} = P(X)\frac{(Y^5 + XY^4 + J_3 Y^3 + \ldots + J_1 Y + 1)}{Y}$$

ou

$$\frac{dY}{dX} = P(X)\frac{(Y^5 + K_4 Y^4 + XY^3 + J_2 Y^2 + \ldots + J_1 Y + 1)}{Y},$$

....,

ou enfin

$$\frac{dY}{dX} = P(X)\frac{(Y^5 + K_4 Y^4 + \ldots + K_2 Y^2 + XY + 1)}{Y}.$$

Cette réduction n'est possible toutefois, comme la précédente, que si les coefficients $D_i(x)$, qui figurent dans l'équation en $\frac{dY}{dx}$, ne sont pas tous constants. Si cette circonstance se présente, une quadrature ramène l'équation (1) à une équation dont les coefficients sont constants. L'équation (1) s'intègre ainsi à l'aide de deux quadratures. En dehors de ce cas, l'équation (1) ne saurait admettre un groupe continu de substitutions (2).

3° *Troisième groupe*. — Le dénominateur n'a qu'une racine distincte (cette racine est alors multiple d'ordre $\nu - 2$)

$$y' = \frac{P[y, (x)]}{(y - \alpha)^{\nu-2}}.$$

En posant

$$y = \alpha + \frac{1}{z},$$

il vient

$$z' = c_\nu z^\nu + c_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots + c_0.$$

Faisons ensuite

$$z = t + A,$$

et déterminons A de façon que le coefficient de $t^{\nu-1}$ soit nul dans l'équation en t; il suffit pour cela que

$$A = -\frac{c_{\nu-1}}{\nu c_\nu};$$

alors

$$t' = M(x)(t^\nu + d_{\nu-2} t^{\nu-2} + \ldots + d_0).$$

Posons encore

$$t = BY,$$

B étant choisi de façon que le coefficient de Y^i dans la nouvelle équation soit égal au coefficient de Y^ν; il suffit de prendre

$$B^{\nu-i} = d_i(x),$$

à moins que i ne soit égal à 1, auquel cas B doit vérifier l'égalité

$$-B' + MBd_1 = MB^\nu.$$

Faisons i égal au plus petit des indices *autres que* 1, pour lesquels d_i n'est pas nul. L'équation est ainsi réduite à une des formes

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dY}{dx} = N(x)(Y^\nu + D_{\nu-2}Y^{\nu-2} + \ldots + D_1 Y + 1) \\ &\text{ou} \\ &\frac{dY}{dx} = N(x)(Y^\nu + D_{\nu-2}Y^{\nu-2} + \ldots + Y^i + D_1 Y). \end{aligned}\right.$$

Ceci suppose que l'équation en t n'appartient pas à la classe

$$\frac{dt}{dx} = N(x)(t^\nu + d_1 t).$$

Cette dernière équation s'intègre, comme on sait, à l'aide de deux quadratures, effectuées successivement sur des fonctions de x. Elle admet un groupe continu de substitutions (2).

Laissons de côté ce cas particulier et revenons aux équations (6). Si tous les coefficients D_j sont des constantes, l'équation se ramène comme précédemment à une équation dont les coefficients sont constants. Sinon, soit $C(x)$ le premier des coefficients

$$D_{\nu-2}, \quad D_{\nu-3}, \quad \ldots, \quad D_1,$$

qui dépende de x. En faisant $X = C(x)$, l'équation (1) se trouve ramenée à la forme canonique

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dY}{dX} = P(X)(Y^\nu + K_{\nu-2}Y^{\nu-2} + \ldots + K_{j+1}Y^{j+1} + XY^j + J_{j-1}Y^{j-1} + \ldots + J_1 Y + 1) \\ &\text{ou} \\ &\frac{dY}{dX} = P(X)(Y^\nu + K_{\nu-2}Y^{\nu-2} + \ldots + K_{j+1}Y^{j+1} + XY^j + J_{j-1}Y^{j-1} + \;Y\; + J_1 Y), \\ &\text{ou enfin} \\ &\frac{dY}{dX} = P(X)(Y^\nu + K_{\nu-2}Y^{\nu-2} + \ldots + K_{i+1}Y^{i+1} + Y^i + XY). \end{aligned}\right.$$

Les K, J, P, $X(x)$ sont des invariants; les K désignent des constantes.

Par exemple, l'équation

$$y' = \frac{a_3 y^3 + a_2 y^2 + \ldots + a_0}{b_1 y + b_0}$$

correspond à la forme canonique

$$\frac{dY}{dX} = P(X)(Y^3 + XY + 1), \tag{8}$$

à moins toutefois qu'elle n'appartienne aux types exceptionnels

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dY}{dx} &= N(x)(Y^3 + KY + 1), \\ \frac{dY}{dx} &= N(x)(Y^3 + d_1 Y) \end{aligned}\right. \tag{8'}$$

(K désigne une constante, d_1 une fonction de x).

Comparons ces équations à la forme réduite

$$\frac{dY_1}{dX_1} = Y_1^3 + J_1(X_1). \tag{9}$$

En se servant de l'expression de J_1, donnée au paragraphe précédent, on trouve aussitôt

$$X_1 = \int dX.P(X) e^{2\int dX.X P(X)},$$

$$J_1 = e^{-3\int X P(X)\, dX}$$

et inversement, en passant de (8) à (9),

$$X = -\frac{1}{3} J_1' J_1^{-\frac{5}{3}},$$

$$\frac{1}{P(X)} = \frac{5}{9}\left(\frac{J_1'^3}{J_1^5}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\left(\frac{J_1''^3}{J_1^7}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Comme nous l'avons remarqué, $\frac{J_1'^3}{J_1^5}$, $\frac{J_1''^3}{J_1^7}$ sont des invariants absolus de (8) qui s'expriment algébriquement à l'aide des a_i, b_j, $\frac{da_i}{dx}$, ... Le premier type exceptionnel (8′) correspond au cas où J_1 est, soit constant (mais différent de zéro), soit égal à $(B_0 X_1 + h)^{-\frac{3}{2}}$; le second type (8′) correspondra au cas où J est nul.

De même, l'équation la plus générale, telle que

$$y' = \frac{a_4 y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0}{(y-\alpha)^2},$$

se ramène à l'équation canonique

$$\frac{dY}{dX} = P(X)(Y^4 + XY^2 + JY + 1)$$

ou

$$\frac{dY}{dX} = P(X)(Y^4 + KY^2 + XY + 1),$$

en laissant de côté les types exceptionnels.

Remarquons que les formes de réduction (7) conviennent aux équations des deux premiers groupes, et les formes (5) aux équations du premier.

Les observations faites au sujet des coefficients invariants des équations (4) s'appliquent aux équations (5) et (7). Il serait facile, d'ailleurs, d'introduire d'autres formes canoniques où figureraient seulement des invariants absolus, fonctions rationnelles des a_i, b_j, $\frac{da_i}{dx}$, ... Mais ces équations seraient peu avantageuses pour le calcul.

Les équations (7), pas plus que les équations (5) et (4), ne sauraient admettre un groupe continu de transformations (2).

En définitive, nous venons de mettre en évidence des formes réduites des équations (1), telles que les équations canoniques d'une même classe soient en nombre limité.

Les substitutions (2) qui permettent de ramener une équation (1) à sa forme réduite sont également en nombre limité, et s'obtiennent algébriquement. Les seules équations (1), pour lesquelles il n'existe pas de pareilles formes canoniques, sont celles qui admettent un groupe continu de substitutions (2). Une telle substitution, qu'on détermine algébriquement, ramène alors l'équation à un des types

$$\frac{dY}{dx} = N(x)R(Y), \qquad \frac{dY}{dx} = N(x)Y^\nu + P(x)Y.$$

Dans le premier cas, l'équation s'intègre à l'aide de deux quadratures, portant respectivement sur deux fonctions de x et de Y. Dans le second cas, elle s'intègre à l'aide de deux quadratures successives effectuées sur des fonctions de x. L'équation de Riccati fait exception à ce théorème.

Nous appellerons *formes canoniques* ou *réduites de première espèce*, les formes introduites au n° 2, et *formes de seconde espèce* celles dont nous venons de parler.

On peut se servir bien aisément de ces dernières pour mettre en évidence des cas d'intégrabilité des équations (1). Je me borne à indiquer ici la nature générale des questions qu'on se trouve amené ainsi à résoudre.

Nous laissons de côté les équations admettant un groupe continu de substitutions (2), équations que nous savons intégrer, et nous cherchons à déterminer si l'on peut passer, à l'aide d'une substitution

$$y = \frac{h(x_1)y_1 + h_1}{k(x_1)y_1 + k_1}, \qquad x = \varphi(x_1),$$

d'une équation (1) donnée

$$\frac{dy}{dx} = R[y, (x)]$$

à une équation (1')

$$\frac{dy_1}{dx_1} = R_1[y_1, (x_1)]$$

qui jouit de certaines propriétés, par exemple est intégrable.

On reconnait toujours s'il en est ainsi à l'aide d'opérations purement algébriques; mais le calcul des substitutions (2) elles-mêmes est de nature différente suivant les circonstances. Tout d'abord, si l'équation (1)' est elle-même numériquement donnée, il n'existe qu'un nombre fini de substitutions (2) et elles s'obtiennent algébriquement. De même, si les coefficients de (1)' dépendent explicitement de constantes, il suffit de ramener (1) et (1)' à la forme canonique et de vérifier si les deux équations coïncident pour un choix convenable des constantes.

Mais dans l'hypothèse la plus générale, les a_i^1, b_j^1 satisfont à certaines relations, différentielles ou non, qui définissent les a_i, b_j à l'aide de fonctions et de constantes arbitraires. La réduction de (1)' à la forme canonique présente alors des difficultés en ce qui concerne le changement de la variable x_1 en X_1. Mais il est toujours aisé de ramener les équations (1)′ par une substitution

$$y_1 = \frac{h(x_1)Y_1 + h_1(x_1)}{k(x_1)Y_1 + k_1(x_1)}$$

à une forme qui se déduit de la forme canonique par le seul changement de X_1 en x_1 :

$$(\alpha) \qquad \frac{dY_1}{dx_1} = \rho[Y_1, (x_1)].$$

Supposons donc les équations (1)′ données sous cette forme, et réduisons (1) à l'équation canonique

$$(\beta) \qquad \frac{dY}{dX} = R[Y, (X)].$$

Pour que (β) soit de la même classe qu'une équation (α), il faut et il suffit qu'il existe une fonction

$$X = \psi(x_1)$$

telle que la substitution de x_1 à X fasse coïncider l'équation (β) avec une des équations (α). Si les équations (α) qui appartiennent à la même classe sont en nombre limité, il ne saurait exister qu'un nombre limité de fonctions $\psi(x_1)$ et elles se déterminent algébriquement.

Mais il est possible qu'une infinité d'équations (α) soient de la même classe. Ces équations se déduisent d'une même équation canonique par le changement de X_1 en x_1

$$X_1 = \psi_1(x_1);$$

ψ_1 est une fonction arbitraire ou satisfait à une relation différentielle plus ou moins compliquée. Dans le premier cas, l'équation (β) doit coïncider avec une des équations (α); dans le second, $X = \psi(x_1)$ est l'intégrale d'une équation différentielle.

Pour éclaircir cette difficulté par un exemple, prenons pour équations (1)′ toutes les équations

$$(\gamma) \qquad \frac{dY}{dx_1} = \frac{A(x_1)}{Y}(Y^4 + DY^2 + 1),$$

dont les coefficients satisfont à la relation

$$1 = \frac{A}{x_1}(x_1^4 + D x_1^2 + 1).$$

Ces équations, qui se trouvent mises sous la forme (β), se ramènent, par le changement de la fonction $Y^2 = z$, à une équation de Riccati, et comme elles admettent l'intégrale particulière $Y = x_1$, elles s'intègrent par quadratures. Pour qu'une équation (1) soit de la même classe qu'une des équations (γ), il faut d'abord que, une fois réduite, elle s'écrive

$$(\delta) \qquad \frac{dY}{dX} = \frac{P(X)}{Y}(Y^4 + JY^2 + 1).$$

Effectuons alors le changement de variable $X = \psi(x_1)$, il vient

$$\frac{dY}{dx_1} = \frac{dX}{dx_1}\frac{P(X)}{Y}[Y^4 + J(X)Y^2 + 1];$$

si cette équation coïncide avec une des équations (γ), on a

$$\frac{dx_1}{dX} = \frac{P(X)}{x_1}[x_1^4 + J(X)x_1^2 + 1],$$

c'est-à-dire que $x_1(X)$ doit être une intégrale de (δ).

Nous voyons, en somme, que le calcul des substitutions (2) ne présente de difficultés que dans le cas où une infinité d'équations (β), dépendant de q constantes arbitraires, appartiennent à la même classe. La recherche de la fonction $x_1(X)$ peut alors dépendre de l'intégration d'une équation différentielle d'ordre q. Mais cette singularité ne se rencontre guère dans les exemples qui s'offrent naturellement.

5. Avant de revenir à la question qui nous a conduits à cette étude, j'étendrai en quelques mots la théorie précédente aux équations qui ne sont pas résolues par rapport à y'.

Soit une relation algébrique quelconque entre y et y'

$$(1) \qquad y'^q M_q + y'^{q-1} M_{q-1} + \ldots + y' M_1 + M_0 = 0.$$

Les M_0, M_1, ..., M_q sont des polynômes en y de degré m_0, m_1, ..., m_q

et dépendent de x d'une façon quelconque. Effectuons sur cette équation une substitution (2)

$$(2) \qquad y = \frac{hy_1 + h_1}{ky_1 + k_1}, \qquad x = \varphi(x_1);$$

l'équation devient

$$(1)' \quad N_\nu[y_1, (x_1)]y_1'^q + N_{\nu-2}[y_1, (x_1)]y_1'^{q-1} + \ldots + N_{\nu-2q}[y_1, (x_1)] = 0,$$

les N_i désignant des polynômes de degré i en y_1, et ν le plus grand des nombres m_0, $(m_1 + 2)$, $(m_2 + 4)$, ..., $(m_q + 2q)$.

On peut définir pour ces équations, et de bien des manières, des formes réduites analogues à celles que nous avons déjà étudiées dans le cas de $q = 1$: soit, par exemple, en cherchant à annuler trois termes de (1)' convenablement choisis, comme au n° 2, soit en assujettissant les équations canoniques à des conditions qui les déterminent, pour chaque classe, en nombre fini, comme au n° 4. Je me borne à dire un mot de ces dernières formes, et à étendre aux équations du premier ordre les plus générales les théorèmes établis tout à l'heure sur les équations qui admettent un groupe continu de substitutions (2).

Les points singuliers de la fonction $y'[y, (x)]$ sont les points $y = \alpha(x)$ où y' est infinie, et les points $y = \beta(x)$ où deux valeurs de y' se confondent. Soit

$$F[y, (x)] = 0, \qquad G[y, (x)] = 0$$

les deux équations qui déterminent respectivement les valeurs $\alpha(x)$, $\beta(x)$, pour l'équation (1) ramenée à sa forme la plus générale (1)'. Si l'on effectue dans (1) une substitution (2), les valeurs singulières α_1, β_1 de la nouvelle équation correspondent par les formules (2) aux α, β. La substitution (2) conserve le nombre et l'ordre de multiplicité des racines de F et de G. Pour certaines transformations, une des quantités α_1, β_1 peut devenir infinie.

Ceci posé, considérons d'abord les équations (1) telles que trois au moins des valeurs α, β soient distinctes. Disposons de la transformation

$$y = \frac{h(x)Y + h_1(x)}{k(x)Y + k_1(x)},$$

de manière que les valeurs $Y = \infty$, $Y = 0$, $Y = 1$ correspondent aux valeurs $y = a$, $y = b$, $y = c$. Nous désignons par a, b, c les trois racines de F et G d'ordre de multiplicité le plus élevé. L'équation devient ainsi

$$\Pi_\nu \left(\frac{dY}{dx}\right)^q + \Pi_{\nu-2}\left(\frac{dY}{dx}\right)^{q-1} + \ldots + \Pi_{\nu-2q} = 0.$$

Si les rapports des coefficients de chaque polynôme Π_i ne sont pas indépendants de x, en égalant un de ces rapports à X, nous sommes conduits à une forme canonique qui répond aux conditions exigées.

Si tous ces rapports sont constants, écrivons l'équation ainsi :

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)^q + \frac{R_{q-1}(Y)}{N_{q-1}(x)}\left(\frac{dY}{dx}\right)^{q-1} + \ldots + \frac{R_0(Y)}{N_0(x)} = 0.$$

Les R_i sont des polynômes en Y dont le terme de degré le plus élevé a pour coefficient l'unité; les N_j sont des fonctions de x. Si je pose

$$(3) \qquad \frac{N_{q-i}^{\frac{1}{i}}}{N_{q-j}^{\frac{1}{j}}} = X,$$

le changement de x en X ramène l'équation à une forme canonique invariante. Ceci suppose toutefois que les rapports (3) ne soient pas tous constants.

Au cas contraire, on a

$$N_{q-i} = k_i N_{q-1}^i = k_i A^i(x).$$

Le changement de variable

$$\frac{dx}{A(x)} = dX$$

ramène l'équation à une équation dont les coefficients sont indépendants de X.

Passons au cas où le nombre des valeurs α, β distinctes se réduit à 2. Il ne saurait se réduire davantage, car la fonction multiforme $y'[y, (x)]$, définie par la relation *irréductible* (1), possède au moins deux points critiques β_1, β_2. La transformation

$$y = \frac{\beta_1 z + \beta_2}{z + 1}$$

ramène l'équation à une autre, où la fonction $z'[z, (x)]$ n'a comme points singuliers que $z = 0$ et $z = \infty$. Nous disposons encore de la transformation

$$z = AY, \qquad x = \varphi(X).$$

D'ailleurs, z' se développe suivant les puissances de $z^{\frac{1}{k}}$, k étant un entier. Si l'on pose

$$z^{\frac{1}{k}} = u,$$

il vient

$$\frac{du}{dx} = \frac{c_n u^n + c_{n-1} u^{n-1} + \ldots + c_0}{u^{m'}},$$

car $\frac{du}{dx}$ ne saurait devenir infini pour d'autres valeurs que $u = 0$, $u = \infty$. Il est permis d'ailleurs de supposer $m' < n - 2$, sinon on changerait u en $\frac{1}{u}$. Nous retrouvons ainsi une des équations du second groupe ou du troisième groupe, étudiées dans le paragraphe précédent. Une transformation

$$u = BU,$$
$$x = \varphi(X)$$

la rend canonique, à moins qu'elle ne se ramène à une équation à coefficients constants ou qu'elle ne soit de la forme

$$u' = c_n u^n + c_1 u.$$

La fonction z subit la transformation correspondante

$$z = B^k Y,$$
$$x = \varphi(X),$$

et l'équation (1) est ainsi réduite à une équation canonique, les cas exceptés où elle se ramène soit à une équation dont les coefficients sont constants, soit à une équation

$$z' = Cz + D z^{\frac{k'}{k}}.$$

Pour donner un exemple de telles réductions, considérons les équations

$$y'^2 + (a_2 y^2 + a_1 y + a_0) y' + b_4 y^4 + b_3 y^3 + b_2 y^2 + b_1 y + b_0 = 0.$$

Il n'existe pas de valeurs $y=\alpha$ rendant y' infini.

L'équation, résolue par rapport à y', s'écrit

$$y' = -(a_2 y^2 + a_1 y + a_0) \pm \sqrt{R_4[y,(x)]}.$$

Plaçons-nous dans le cas le plus général, où les quatre racines de R_4 sont distinctes, et où le module du radical dépend de x. Une forme canonique de l'équation sera

$$\frac{dY}{dX} = -(A_2 Y^2 + A_1 Y + A_0) \pm \sqrt{P(X)Y(Y-1)(Y-X)}.$$

Les A_2, A_1, A_0, P, X sont des invariants.

Nous venons de mettre ainsi en évidence des formes réduites des équations (1) algébriques en y' et y; mais les procédés que nous avons employés s'étendent sans peine à toutes les équations du premier ordre. Soit

$$y' = F(y,x)$$

une équation du premier ordre, où F désigne une fonction analytique quelconque de y. Représentons par $\alpha(x)$ les valeurs de y qui rendent y' infini ou indéterminé. S'il existe trois valeurs α distinctes, on se sert de la transformation

$$y = \frac{hY + h_1}{kY + k_1}$$

pour rendre ces valeurs égales à ∞, 0 et 1. On développe alors $\frac{dY}{dx}$ suivant les puissances de $Y - Y_0$, Y_0 étant un point régulier de $\frac{dY}{dx}$,

$$\frac{dY}{dx} = P(x)[(z-z_0)^i + C_{i+1}(z-z_0)^{i+1} + \ldots].$$

Quand tous les C_j ne sont pas constants, on pose, comme plus haut,

$$C_j(x) = X;$$

sinon l'équation se ramène à avoir ses coefficients constants.

Admettons maintenant qu'il n'existe que deux valeurs α distinctes, α_1, α_2. La transformation

$$y = \frac{\alpha_1 z + \alpha_2}{z + 1}$$

rend l'une de ces valeurs nulle, l'autre infinie. On dispose encore de la substitution

$$(4) \qquad z = \mathrm{AY}, \qquad x = \varphi(\mathrm{X}).$$

D'autre part, faisons $z = e^u$; il vient

$$\frac{dz}{dx} = e^u \frac{du}{dx} = \rho[u, (x)]$$

ou bien

$$\frac{du}{dx} = f[u, (x)] = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \ldots,$$

ρ et f désignant deux fonctions holomorphes de u.

Ajoutons qu'à la transformation (4) correspond la suivante

$$u = \mathrm{U} + \mathrm{L.A} = \mathrm{U} + \mathrm{B}, \qquad x = \varphi(\mathrm{X}).$$

Disposons de B de manière que, dans le développement de $\frac{d\mathrm{U}}{dx}$

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx} = \mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1 \mathrm{U} + \mathrm{C}_2 \mathrm{U}^2 + \ldots,$$

le rapport $\frac{\mathrm{C}_2}{\mathrm{C}_1}$ soit égal à une quantité arbitraire donnée. Il faut, pour cela, que

$$\frac{f''(\mathrm{B})}{f'(\mathrm{B})} = \gamma,$$

si f' et f'' désignent les dérivées $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$, où l'on fait $u = \mathrm{B}$. La quantité B une fois déterminée, on écrit

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx} = \mathrm{P}(x)\,(\mathrm{U}^i + \mathrm{D}_{i+1}\mathrm{U}^{i+1} + \ldots),$$

et l'on pose

$$\mathrm{D}_j(x) = \mathrm{X}.$$

L'équation en z se trouve ramenée ainsi, par la substitution

$$z = \mathrm{Y}e^{\mathrm{B}}, \qquad \mathrm{X} = \mathrm{D}_j(x),$$

à une forme canonique, en exceptant le cas particulier où elle correspond à une équation dont les coefficients sont constants.

Remarquons toutefois qu'on ne peut calculer B comme nous l'avons fait que si $\frac{f''(B)}{f'(B)}$ est fonction de B. Qu'arrive-t-il quand

$$\frac{f''(u)}{f'(u)} \equiv \gamma(x)\,?$$

Tout d'abord, si $\gamma = 0$, l'équation en u est une équation linéaire; sinon on trouve

$$\frac{du}{dx} = f(u) = d_0 + de^{\gamma u},$$

d_0, d, γ dépendant de x. L'équation en z correspondante est alors

$$\frac{dz}{dx} = d_0 z + dz^{(\gamma+1)} = d_0 z + d_* z^{\delta}.$$

Si δ ne dépend pas de x, l'équation s'intègre par quadratures. Au cas contraire, on pose $\delta = X$, et l'on dispose ensuite de A de façon que le coefficient de Y^X dans l'équation réduite soit l'unité, autrement dit que l'on ait

$$\frac{dY}{dX} = J(X) + Y^X.$$

On peut, à l'aide d'une quadrature, ramener la même équation à la suivante

$$\frac{dY}{dX} = P(X)Y^X;$$

et, à l'aide de deux quadratures, à la suivante

$$\frac{dY}{dX} = Y^{Q(X)}.$$

Ces diverses formes mettent en évidence des cas d'intégration.

Pour terminer, il nous reste à examiner le cas où la fonction $y' = F[y, (x)]$ n'admet qu'un point singulier α. La transformation

$$y = \alpha + \frac{1}{z}$$

le rejette à l'infini. Nous disposons encore de la substitution

$$z = AY + B, \qquad x = \varphi(X).$$

Laissons d'abord $x = X$, et développons l'équation en Y

$$\frac{A\,dY}{dx} + \frac{dA}{dx}Y + \frac{dB}{dx} = \rho[AY + B, (x)]$$
$$= \rho(B) + \frac{\rho'(B)}{1}AY + \frac{\rho''(B)}{1.2}A^2Y^2 + \ldots$$
$$= C_0 + C_1Y + C_2Y^2 + C_3Y^3 + \ldots;$$

ρ représente une fonction holomorphe de $z = AY + B$; $\rho'(B)$, $\rho''(B)$, ... ses dérivées par rapport à z où l'on fait $z = B$. Déterminons B de façon à annuler le coefficient C_2 de Y^2; il faut pour cela que

$$\rho''(B) = 0.$$

Ceci exige que ρ'' ne soit pas indépendant de z (l'équation serait alors une équation de Riccati), et aussi que ρ'' ne soit pas égal à e^g, g étant une fonction holomorphe de z. Si cette circonstance se présente, on dispose de B de façon que $\frac{C_1C_2}{C_3}$ soit égal à une constante donnée, ce qui exige que

$$\frac{\rho''\rho^{\text{IV}}}{\rho'''^2} = \gamma,$$

ou encore que

$$\frac{g'' + g'^2}{g'^2} = \gamma,$$
$$-\frac{g''}{g'^2} = 1 - \gamma = \delta.$$

Il n'y a d'exception que si $-\frac{g''}{g'^2} \equiv \delta_1$, δ_1 ne dépendant que de x. Si δ_1 n'est pas nul, $g = \frac{1}{\delta_1}L(mz + n)$; mais, par hypothèse, g est holomorphe. Le seul cas exceptionnel est donc celui où δ_1 est nul. Nous le traiterons dans un instant. Dans le cas général, une fois B calculé, on assujettit A à la condition que le rapport des coefficients de Y^i et Y^j, dans le développement de $\frac{dY}{dx}$, soit égal à l'unité. Quand l'équation en $t = z - B$ n'est pas de la forme

$$t' = mt + nt^\nu,$$

la valeur de A se calcule sans quadrature, en prenant i et j différents de 1. La réduction s'achève dès lors sans difficulté en égalant à X le rapport des coefficients de $Y^{i'}$, $Y^{j'}$, à moins que tous ces rapports ne soient constants.

Revenons au cas où l'équation en z s'écrit

$$\frac{dz}{dx} = m + nz + pe^{kz}$$

[c'est le cas où $\delta_1 = g''(z) \equiv 0$]. On fait

$$z = \frac{t}{k};$$

il vient alors

$$\frac{dt}{dx} = d_0 + d_1 t + de^t.$$

On pose ensuite

$$t = Y + B,$$

et on assujettit B à la condition

$$\frac{d_1}{e^B d} = 1;$$

par suite

$$\frac{dY}{dx} = D(e^t + t + D_0);$$

on fait alors $D_0 = X$, à moins que D_0 ne soit constant. Si $d_1 = 0$, B ne peut se calculer ainsi, mais l'équation

$$\frac{dt}{dx} = d_0 + de^t$$

se ramène à une équation linéaire en posant $u = e^t$.

En définitive, soit

$$\frac{dy}{dx} = F[y, (x)]$$

une équation du premier ordre, où F représente une fonction analytique quelconque de y et x. Nous venons d'indiquer une méthode pour ramener, à l'aide d'une substitution (2), cette équation à des formes canoniques, c'est-à-dire à des formes dont un nombre limité seulement appartiennent à la même classe.

Les seules équations qui ne soient pas susceptibles d'une telle réduction sont celles qui admettent un groupe continu de substitutions (2). Ces dernières correspondent toutes, par une transformation (2), à des équations à coefficients constants. La seule équation de Riccati mise à part, elles se ramènent, sans quadratures, à l'une des formes

$$\frac{dY}{dX} = M(X)N(Y),$$
$$\frac{dY}{dX} = AY + BY^\alpha$$

et, par suite, s'intègrent à l'aide de deux quadratures ([1]).

6. Nous allons appliquer maintenant ces propriétés de la transformation (2) à la recherche des cas où l'intégrale de l'équation

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = R[y, (x)] = \frac{P[y, (x)]}{Q[y, (x)]}$$

ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles.

Quelle modification apporte dans l'intégrale la substitution

$$(2) \qquad y = \frac{h(x_1)y_1 + h_1}{k(x_1)y_1 + k_1}, \qquad x = \varphi(x_1)?$$

L'intégrale est définie par une relation

$$(3) \qquad \begin{cases} F(y, x) \equiv y^n + \gamma_{(n-1)}y^{n-1} + \gamma_{(n-2)}y^{n-2} + \ldots + \gamma_1 y + \gamma_0 \\ \qquad \equiv y^n + (\alpha_{n-1}\gamma_i + \beta_{n-1})y^{n-1} + \ldots \\ \qquad\qquad + \gamma_i y^i + \ldots + (\alpha_1\gamma_i + \beta_1)y + \alpha_0\gamma_i + \beta_0 = 0, \end{cases}$$

γ_i vérifiant l'équation

$$\frac{d\gamma_i}{dx} = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

Après la substitution, elle devient

$$\begin{aligned}(hy_1 + h_1)^n + (\alpha_{n-1}\gamma_i + \beta_{n-1})(hy_1 + h_1)^{n-1}(ky_1 + k_1) + \ldots \\ + \gamma_i(hy_1 + h_1)^i(ky_1 + k_1)^{n-i} + \ldots + (\alpha_0\gamma_i + \beta_0)(ky_1 + k_1)^n = 0,\end{aligned}$$

([1]) La même méthode s'applique à la recherche des équations d'ordre supérieur qu'admettent un groupe continu de transformations de la forme $y = \frac{hy_1 + h_1}{ky_1 + k_1}$, $x = \varphi(x_1)$, le groupe dépendant d'une ou plusieurs constantes arbitraires. Mais c'est là un point que je me réserve de développer ailleurs.

ou encore

$$y_1^n + g_{(n-1)} y_1^{n-1} + \ldots + g_i y_1^i + \ldots + g_1 y_1 + g_0 = 0,$$

les g_i étant des fonctions de x_1. On voit que g_i se calcule en fonction de γ_i par les formules

$$g_i = \frac{A\gamma_i + B}{A_1\gamma_i + B_1}, \qquad x = \varphi(x_1);$$

par exemple, si $i = 0$,

$$g_0 = \frac{h_1^n + \beta_{(n-1)} h_1^{n-1} k_1 + \ldots + \beta_1 h_1 k_1^{n-1} + \gamma_0(\alpha_{(n-1)} h_1^{n-1} k_1 + \alpha_{n-2} h_1^{n-2} k_1^2 + \ldots + k_1^n)}{h^n + \beta_{(n-1)} h^{n-1} k + \ldots + \beta h k^{n-1} + \gamma_0(\alpha_{n-1} h^{n-1} k + \alpha_{n-2} h^{n-2} k + \ldots + k^n)},$$

quand on remplace x par $\varphi(x_1)$.

Ceci étant, on peut disposer de la substitution (2) soit pour simplifier l'équation (1), soit pour simplifier *a priori* la forme de l'équation (3). La remarque suivante permet d'introduire des substitutions (2) qui contribuent en même temps à ce double résultat.

Pour fixer les idées, faisons $i = 0$ dans l'équation (3). Elle devient

$$y^n + (\alpha_{n-1}\gamma_0 + \beta_{n-1}) y^{n-1} + (\alpha_{n-2}\gamma_0 + \beta_{n-2}) y^{n-2} + \ldots + (\alpha_1\gamma_0 + \beta_1) y + \gamma_0 = 0,$$

avec

$$\gamma_0' = M\gamma_0^2 + N\gamma_0 + P,$$

ou encore

$$\gamma_0 = \frac{f(x) + C\varphi(x)}{f_1(x) + C\varphi_1(x)}$$

(C désigne une constante).

Admettons que le dénominateur Q de (1) ait une racine $y = 0$ d'ordre λ : quand une valeur y d'une intégrale s'annule, λ autres valeurs de la même intégrale s'annulent en même temps. Si donc, pour $x = x_0$, γ_0 s'annule,

$$\gamma_0(x_0) = \frac{f(x_0) + C\varphi(x_0)}{f_1(x_0) + C\varphi_1(x_0)} = 0,$$

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\lambda$ s'annulent par le fait même, c'est-à-dire que $\beta_1(x_0)$, $\beta_2(x_0), \ldots, \beta_\lambda(x_0)$ sont nuls quel que soit x_0, donc nuls identiquement. On voit aussitôt que ceci subsiste dans le cas particulier où γ_0 ne dépend pas de C.

De même, quand Q a une racine infinie d'ordre λ (autrement dit quand le degré de Q est inférieur de $\lambda + 2$ unités au degré de P), les coefficients $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_{n-\lambda}$ sont nuls : $\gamma_{n-1}, \gamma_{n-2}, \ldots, \gamma_{(n-\lambda)}$ sont indépendants de la constante d'intégration.

Plus généralement, soit $y = a$ une racine d'ordre λ de Q. Écrivons l'équation (3) ainsi

$$\begin{aligned} & y^n + \beta_{n-1}y^{n-1} + \beta_{n-2}y^{n-2} + \ldots \\ & \quad + \beta_1 y + \gamma_0(\alpha_{n-1}y^{n-1} + \alpha_{n-2}y^{n-2} + \ldots + \alpha_1 y + 1) \equiv \mathrm{H}(y) + \gamma_0 \mathrm{K}(y) = 0. \end{aligned}$$

La racine $y = a$ doit être racine d'ordre $(\lambda + 1)$ de cette équation, quel que soit γ_0. Il faut et il suffit pour cela que

$$\frac{\mathrm{H}(a)}{\mathrm{K}(a)} = \frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{K}'(a)} = \frac{\mathrm{H}''(a)}{\mathrm{K}''(a)} = \ldots = \frac{\mathrm{H}^\lambda(a)}{\mathrm{K}^\lambda(a)},$$

$\mathrm{H}^i(a)$, $\mathrm{K}^i(a)$ désignant des dérivées d'indice i de H et K par rapport à y, où l'on fait $y = a$.

Ces remarques faites, voici comment il convient d'employer la substitution (2).

On commence par rendre respectivement infinie et nulle les deux racines de Q d'indice le plus élevé. On dispose encore de la transformation

$$y = \mathrm{A}\mathrm{Y}, \qquad x = \varphi(\mathrm{X}).$$

Si l'équation (1) est une équation donnée, on se sert de cette transformation pour la ramener à sa forme la plus simple, par exemple à l'une des formes canoniques étudiées plus haut. S'il s'agit, au contraire, de déterminer toutes les équations (1) dont le coefficient différentiel est de degré donné et dont l'intégrale générale est définie par une équation (3), on peut diriger le calcul de la même manière, ou encore se servir de la substitution pour simplifier cette équation (3). Quel que soit le procédé adopté, on obtient des conditions où ne figurent que des invariants de (1). Il suffit de remplacer ces invariants par leurs valeurs en fonction des coefficients d'une équation quelconque de la classe, pour avoir les conditions auxquelles doit satisfaire l'équation cherchée la plus générale.

Quand le dénominateur Q de R, dans (1), n'a qu'une racine, on la rejette d'abord à l'infini. On dispose ensuite de la substitution

$$y = AY + B, \qquad x = \varphi(X)$$

pour simplifier, suivant les cas, les équations (1) ou (3).

Nous allons appliquer ces procédés généraux de calcul à plusieurs exemples particuliers.

7. Reprenons, en premier lieu, l'étude des équations

$$(1) \qquad y' = R[y, (x)] = \frac{P[y, (x)]}{Q[y, (x)]},$$

dont l'intégrale générale ne prend que deux valeurs autour des points critiques mobiles.

L'intégrale s'écrit

$$y^2 + (\alpha\gamma_0 + \beta) + \gamma_0 = 0,$$

et l'équation (1), qui lui correspond, a son coefficient différentiel de degré $\nu = 4$ ou $\nu = 3$.

Soit d'abord $\nu = 4$. Le dénominateur Q a ses deux racines distinctes; car si $y = \alpha$ est racine double de Q, trois valeurs d'une intégrale particulière deviennent égales ensemble à α, ce qui est impossible dans le cas actuel. D'une manière générale, *quand l'intégrale d'une équation* (1) *ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, l'ordre de multiplicité des racines de* Q *est au plus égal à* $n - 1$.

Ramenons donc d'abord l'équation (1) à la forme

$$(1)' \qquad y' = \frac{a_4 y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0}{y};$$

l'intégrale vérifie alors l'équation

$$y^2 - \gamma = 0$$

avec

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P,$$

c'est-à-dire que l'équation (1)' doit coïncider avec la suivante

$$2yy' = My^4 + Ny^2 + P.$$

Cette équation, ramenée à la forme canonique de seconde espèce, devient

$$\frac{dY}{dX} = \frac{A(X)(Y^4 + XY^2 + 1)}{Y}.$$

Pour qu'une équation (1) ($\nu = 4$) soit de la classe considérée, il faut et il suffit que, dans sa forme réduite

$$\frac{dY}{dX} = \frac{A(X)(Y^4 + J_3 Y^3 + XY^2 + J_1 Y + 1)}{Y},$$

les invariants J_1 et J_3 soient nuls. Signalons le cas particulier où le coefficient J_2 de Y^2 serait indépendant de x; l'équation correspondante

$$\frac{dY}{dx} = \frac{A(x)(Y^4 + CY^2 + 1)}{Y}$$

s'intègre par deux quadratures.

Passons aux équations $\nu = 3$. On ramène d'abord l'équation considérée à la suivante

$$y' = a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0,$$

et son intégrale s'écrit

$$y^2 + \alpha y + \gamma_0 = 0.$$

Posons

$$y = z - \frac{\alpha}{2},$$

l'intégrale prend la forme

$$y^2 = \gamma$$

avec

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

L'équation en z s'écrit donc

$$2zz' = Mz^4 + Nz^2 + P,$$

et pour que $\nu = 3$, il faut que le second membre soit divisible par z (donc que P soit nul), ou encore que M soit nul : le second cas se ramène au premier en changeant z en $\frac{1}{z}$, et l'équation étudiée est de l'espèce

$$z' = Az^3 + Bz,$$

équation que nous avons déjà signalée et qui s'intègre par deux quadratures. Dans la forme canonique

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + J,$$

qui lui correspond,

$$J = 0.$$

8. Voici donc traité, bien aisément, un exemple qui n'était pas exempt de difficulté avant l'introduction de la substitution (2). Abordons maintenant l'étude plus compliquée des équations (1) dont l'intégrale générale ne prend que trois valeurs autour des points critiques mobiles.

Le degré ν du coefficient différentiel de (1) peut être alors égal à 3, 4, 5 ou 6. Considérons, en premier lieu, le cas où $\nu = 6$, les quatre racines du dénominateur Q étant distinctes.

Réduisons d'abord l'équation à la forme

$$(2) \qquad y' = \frac{a_6 y^6 + a_5 y^5 + a_4 y^4 + \ldots + a_1 y + a_0}{y(y-1)(y-\alpha)}.$$

L'intégrale s'écrira

$$y^3 + A y^2 - B\gamma y - \gamma = 0$$

ou

$$\gamma = \frac{y^3 + A y^2}{By + 1}$$

avec

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P$$

(γ dépend toujours de la constante d'intégration, sinon y ne renfermerait pas de constante).

Les fonctions $A(x)$, $B(x)$ sont liées, de plus, par l'égalité

$$AB + 2(A + B) + 3 = 0,$$

qui exprime que $y = 1$ est racine de Q. L'équation en y doit coïncider avec la suivante :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2By(y-1)\left(y - \frac{A}{B}\right)y' = {} & My^6 + 2MAy^5 + y^4(MA^2 + NB + B') \\ & + y^3[N(AB + 1) + AB' - BA'] \\ & + y^2(NA + PB^2 - A') + 2PBy + P. \end{aligned} \right.$$

D'où l'on conclut sans peine

$$(4)\quad \begin{cases} A = \dfrac{a_5}{2a_6}, \qquad B = \dfrac{a_1}{2a_0}, \qquad M = \dfrac{a_5}{\alpha}, \qquad P = a_1, \\ N\left(\dfrac{a_5 a_1}{4a_0 a_6} - 1\right) = \dfrac{a_1}{a_0}\left(\dfrac{a_5 a_4}{2a_6} - a_3 + \dfrac{a_1 a_2}{2a_0}\right) - \dfrac{a_5^4}{8\alpha a_6^3} - \dfrac{a_1^4}{8a_0^3}, \end{cases}$$

avec les conditions

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{a_5}{a_6} = \alpha \dfrac{a_1}{a_0}, \\ \dfrac{a_5 a_1}{a_6 a_0} + 4\left(\dfrac{a_5}{a_6} + \dfrac{a_1}{a_0}\right) + 12 = 0, \\ 2\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{a_5 a_1}{a_6 a_0}\right) = \dfrac{4a_1}{a_0}\left(\dfrac{a_4 a_5}{a_6} - \dfrac{a_2 a_1}{a_0}\right) - \dfrac{a_5^4}{4\alpha a_6^3} + \dfrac{a_1^4}{4a_0^3}, \\ \dfrac{d\alpha}{dx}\left(\dfrac{3}{4}\dfrac{a_1^2}{a_0^2} - \dfrac{1}{\alpha}\right) = 2a_3 + \left(\dfrac{a_5}{2a_6} + \dfrac{2a_0}{a_1}\right)\left(\dfrac{a_5^3}{4\alpha a_6^2} - \dfrac{a_1 a_4}{a_0}\right) + \left(\dfrac{a_1}{2a_0} + \dfrac{2a_6}{a_5}\right)\left(\dfrac{a_1^3}{4a_0^2} - \dfrac{a_2 a_1}{a_0}\right). \end{cases}$$

Les coefficients a_i, α de l'équation (2) sont des invariants de l'équation la plus générale de la classe. Nous avons ainsi les $(\nu - 2) = 4$ conditions auxquelles doivent satisfaire les invariants de l'équation (1) $(\nu = 6)$ pour que son intégrale ne prenne que trois valeurs autour des points critiques mobiles. Quand ces conditions sont réalisées, l'équation se ramène par la transformation

$$\gamma = \frac{y^3 + Ay^2}{By + 1}$$

à l'équation

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P,$$

A, B, M, N, P s'exprimant en fonction des invariants de (1) par les formules (4).

Si l'on veut ramener l'équation (2) à une forme canonique de seconde espèce, il convient de distinguer plusieurs cas.

Quand la quatrième racine α de Q dépend de x, on pose

$$X = \alpha(x),$$

et l'équation devient

$$\frac{dY}{dX} = G(X)\frac{(Y^6 + J_5 Y^5 + J_4 Y^4 + \ldots + J_1 Y + J_0)}{Y(Y-1)(Y-X)};$$

les J vérifient les relations obtenues en remplaçant dans les équations (5) α par X, a_i par (GJ_i), $\frac{da_i}{dx}$ par $\frac{d(GJ_i)}{dX}$.

Si α est une constante, les conditions (5) nous montrent que A et B sont constants.

L'équation (2) peut alors s'écrire

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b(y^6+c_5y^5+b_4y^4+\ldots+b_2y^2+c_1b_0y+b_0)}{y(y-1)(y-\alpha)};$$

les b sont des fonctions de x, et α, c_1, c_5 des constantes qui vérifient les relations

$$c_5=\alpha c_1, \qquad c_5c_1+4(c_5+c_1)+12=0.$$

Les deux autres relations (5) deviennent

$$c_5\alpha+\frac{2b_3}{\frac{c_1c_5}{4}+1}=\frac{4}{c_1}b_4,$$

$$\frac{2\alpha b_3}{\frac{c_1c_5}{4}+1}+c_1b_0=\frac{4}{c_1}b_2.$$

Si b_0 n'est pas constant, on pose $b_0(x)=X$; si b_0 est constant, on pose $b_2(x)=X$; enfin, si b_0 et b_2 sont constants, b_3 et b_4 le sont également et l'équation est de la même classe qu'une équation à coefficients constants.

Examinons maintenant les équations $\nu=6$, telles que Q ait des racines multiples : l'ordre de multiplicité ne peut dépasser 2. Supposons d'abord que Q ait une seule racine double, et ramenons l'équation à la forme

$$(2)' \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{a_6y^6+a_5y^5+\ldots+a_1y+a_0}{y(y-1)}.$$

L'intégrale satisfait à la relation

$$y^3+Ay^2-\gamma=0$$

avec

$$\gamma'=M\gamma^2+N\gamma+P;$$

de plus, B vérifie la condition

$$3+2A=0 \qquad \text{ou} \qquad A=-\tfrac{3}{2},$$

qui exprime que $y = 1$ est racine de Q : on peut donc poser

$$\gamma = 2y^3 - 3y^2,$$

et l'équation $(2)'$ doit coïncider avec la suivante

$$(3)' \qquad 6y(y-1)y' = 4My^6 - 12My^5 + 9My^4 + 2Ny^3 - 3Ny^2 + P,$$

ce qui exige qu'on ait

$$(4)' \qquad \begin{cases} M = \dfrac{3a_6}{2}, \\ N = 3a_3, \\ P = 6a_0 \end{cases}$$

avec les conditions

$$(5)' \qquad a_5 = -3a_6 = -\tfrac{3}{2}a_4, \qquad 3a_3 + 2a_2 = 0, \qquad a_1 = 0.$$

Quand ces dernières conditions sont remplies, l'équation se ramène par la transformation

$$\gamma = 2y^3 - 3y^2$$

à l'équation

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

Supposons enfin que Q ait deux racines doubles. Ramenons l'équation à la forme

$$y' = \frac{a_6 y^6 + \ldots + a_1 y + a_0}{y^2}.$$

L'intégrale est donnée par la formule

$$y^3 - \gamma = 0$$

avec

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

L'équation considérée est donc de la forme

$$y^2 y' = a_6 y^6 + a_3 y^3 + a_0.$$

Nous avons énuméré ainsi toutes les équations qui répondent à la question et pour lesquelles $\nu = 6$. Soit maintenant $\nu = 5$: si les trois racines de Q sont distinctes, on peut écrire ainsi l'équation donnée

$$(6) \qquad y' = \frac{b_5 y^5 + b_4 y^4 + \ldots + b_1 y + b_0}{y(y-1)}.$$

Son intégrale satisfait à la relation

$$\gamma = \frac{y^3 + Ay^2}{By + 1}$$

avec la condition

$$AB + 2(A + B) + 3 = 0.$$

L'équation (6) doit donc coïncider avec l'équation (3) calculée précédemment, ce qui ne peut avoir lieu que si $(y - \alpha)$ est en facteur dans les deux membres de (3). S'il en est ainsi, on a

$$\begin{aligned}
a_6 &= b_5,\\
a_5 &= b_4 - \alpha b_5,\\
a_4 &= b_3 - \alpha b_4,\\
&\dots\dots\dots\dots,\\
a_1 &= b_0 - \alpha b_1,\\
a_0 &= -\alpha\beta_0,
\end{aligned}$$

et les coefficients a_i satisfont aux relations (5). La première donne

$$\frac{a_5}{a_6} = \alpha \frac{a_1}{a_0},$$

c'est-à-dire

$$\alpha\left(1 + \frac{b_1}{b_0}\right) = 1 + \frac{b_4}{b_5}.$$

En remplaçant dans les trois dernières α et les a_i par leurs valeurs en fonction des b_j, on a les trois conditions nécessaires et suffisantes auxquelles sont assujettis les coefficients *invariants* de (6) pour que l'intégrale soit de la forme voulue. Je me dispense d'écrire ces conditions, qui sont sans intérêt. Deux de ces conditions sont d'espèce différentielle, et renferment l'une la dérivée de

$$\alpha = \frac{1 + \dfrac{b_4}{b_5}}{1 + \dfrac{b_1}{b_0}},$$

l'autre la dérivée de

$$\frac{a_1 a_5}{a_0 a_6} = \frac{b_0 b_5 (b_0 b_5 + b_1 b_4)}{(b_0 + b_1)(b_5 + b_4)}.$$

Quand ces conditions sont remplies, l'équation (6) se ramène à l'équation

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P,$$

par la transformation

$$\gamma = \frac{y^2 + A}{By + 1};$$

les A, B, M, N, P sont donnés par les formules (6) à l'aide des a_i, α, par suite en fonction des B_i.

Une remarque importante est la suivante : un calcul pénible vérifierait que $y = \alpha$ est une intégrale de (6); donc

$$\gamma = \frac{\alpha^2 + A}{B\alpha + 1}$$

est une intégrale de l'équation de Riccati, et cette équation s'intègre par quadratures. Mais ceci est évident *a priori :* nous faisons

$$\gamma = f(y, x)$$

dans l'équation de Riccati; elle devient

$$\frac{\partial f}{\partial y} y' = -\frac{\partial f}{\partial x} + Mf^2 + Nf + P.$$

Pour que

$$\gamma_1 = f(y_1, x)$$

soit une intégrale, il faut et il suffit que l'équation précédente soit vérifiée quand on y fait $y = y_1$; or $y = \alpha$ annule à la fois $\frac{\partial f}{\partial y}$ et le second membre de cette équation; donc

$$\gamma = f(\alpha, x)$$

est une intégrale de l'équation de Riccati. C'est là d'ailleurs un fait que nous démontrerons tout à l'heure d'une manière générale. Nous l'avons rencontré déjà dans le cas particulier où $n = 2$, $\nu = 3$.

Admettons maintenant que, ν restant égal à 5, Q ait une racine double. L'équation peut s'écrire

$$(6)' \qquad y' = \frac{b_5 y^5 + b_4 y^4 + \ldots + b_0}{y};$$

l'intégrale doit être de la forme

$$\gamma = y^2(y + A).$$

Nous pourrons toujours changer y en $-\frac{2}{3}Ay$ et poser

$$\gamma = y^2(2y - 3).$$

Si l'on se reporte aux calculs faits pour le cas de $\nu = 6$, on voit que l'équation $(6)'$ doit coïncider avec l'équation $(3)'$, ce qui exige que $(\gamma - 1)$ soit en facteur dans le second membre de $(3)'$ et qu'on ait

$$\begin{aligned} a_6 &= b_3, \\ a_5 &= b_4 - b_3, \\ a_4 &= b_3 - b_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1 &= b_0 - b_1, \\ a_0 &= -b_0. \end{aligned}$$

Aux conditions $(5)'$ correspondent alors les conditions

$$b_4 = -2b_3, \qquad b_3 = \frac{b_5}{4}, \qquad b_2 = \frac{3b_5}{4} - 2b_0, \qquad b_1 = b_0.$$

Quand elles sont remplies, la transformation

$$\gamma = y^2(2y - 3)$$

ramène l'équation $(6)'$ à l'équation de Riccati

$$\gamma' = \frac{3b_5}{2}\gamma^2 + 3(b_2 - b_3)\gamma - 6b_0.$$

L'équation $(6)'$ admet l'intégrale $y = 1$, et l'équation en (γ) admet l'intégrale $\gamma = -1$.

Si $\frac{b_0}{b_5}$ n'est pas une constante, l'équation $(6)'$ se trouve ramenée elle-même à une forme qu'on peut regarder comme une forme canonique de seconde espèce. Il suffit de poser

$$\frac{b_5}{b_0} = X,$$

et l'équation devient

$$\frac{dY}{dX} = \frac{B_0(X)(1 + Y + J_2Y^2 + J_3Y^3 + \ldots + XY^5)}{Y}.$$

Les J_i, β_0, X sont des invariants liés par les relations

$$J_4 = -2X, \qquad J_3 = \frac{X}{4}, \qquad J_2 = \frac{3X}{4} - 2.$$

Si $\frac{b_0}{b_4}$ est constant, l'équation se ramène à une équation dont les coefficients sont constants.

Le cas où $\nu = 4$ se traite sans plus de difficulté, en exprimant que les deux membres de l'équation (4) contiennent à la fois en facteur $y - 1$ et $y - \frac{A}{B}$, et en ramenant ensuite l'équation à une forme canonique par une substitution

$$y = aY,$$
$$x = \varphi(X).$$

On connait alors, en général, deux intégrales particulières de l'équation (1), qui, toutefois, peuvent se confondre dans certains cas. Mais je n'insiste pas davantage, pour ne pas multiplier les calculs, sur cette classe d'équations que nous étudierons tout à l'heure d'une autre façon, et je passe, pour terminer cette discussion, au cas où ν serait égal à 3.

Nous ramenons d'abord l'équation à la forme

$$y' = C_0 + 3C_1y + 3C_2y^2 + C_3y^3.$$

Son intégrale s'écrit

$$y^3 + Ay^2 + (B - C\gamma)y + \gamma = 0,$$

et nous pouvons toujours nous servir de la substitution

$$y = hy_1 + h_1,$$

de façon que cette dernière équation devienne

$$\gamma = \frac{y^3 + y}{C_1y + 1},$$

et en posant $C_1(x) = X$ on aura

$$\gamma = \frac{y^3 + y}{Xy + 1}$$

avec

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

Ceci suppose, toutefois, B différent de zéro et C_1 fonction de x. Dans le cas où ces conditions ne seraient pas réalisées, on donnerait à γ l'une des expressions

$$\gamma = \frac{y^3}{y+1} \qquad \text{ou} \qquad \gamma = \frac{y^3+1}{c_0 y + 1},$$

c_0 désignant une constante.

Prenons d'abord le cas où l'on a

$$\gamma = \frac{y^3 + y}{Xy + 1},$$

et exprimons que l'équation

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P$$

coïncide avec l'équation (1) donnée quand on y remplace γ par cette valeur. Il faudra exprimer qu'un polynôme du sixième degré est divisible par un polynôme du troisième : d'où trois équations linéaires en M, N, P, dont les coefficients dépendent de X. Ces équations ne peuvent être indéterminées; sinon on pourrait disposer arbitrairement de l'invariant unique J de l'équation, et toutes les équations

$$Y' = Y^3 + J(X),$$

par exemple, auraient leur intégrale de la forme cherchée, quelle que fût la fonction $J(X)$. Il en résulte qu'une seule valeur de M, N, P satisfait aux conditions précédentes; il n'existe donc qu'une équation (1) distincte qui soit de l'espèce cherchée, autrement dit toutes les équations qui répondent à la question se déduisent de l'une d'entre elles par une substitution

$$y = \frac{hY + h_1}{kY + k_1}, \qquad x = \varphi(X)$$

qu'on détermine par des opérations linéaires.

Pour ce qui est des cas où γ est de la forme

$$\gamma = \frac{y^3}{y+1}, \qquad \gamma = \frac{y^2+1}{c_0 y + 1},$$

on voit aussitôt qu'ils correspondent à une équation (1) de l'espèce

$$y' = \mathrm{N}(x)\,(y^3 + a_0 y^2 + b_0 y + c_0),$$

a_0, b_0, c_0 étant des constantes.

Si donc l'équation (1) ($\nu = 3$) n'est pas de la classe d'une équation à coefficients constants, il suffit, pour voir si elle fait partie des équations cherchées, de reconnaître si elle se ramène à une de ces équations particulières, par exemple à l'équation

$$y' = \frac{2y(y-1)}{x[2y(x-2)+3]},$$

dont l'intégrale générale est donnée par l'égalité

$$(xy+1)(y-1)^2[(x-2)y+1]^{-1} = \text{const.}$$

Ceci nous montre que (1) s'intègre alors algébriquement, ce qui était à prévoir, puisqu'on connaît trois intégrales particulières de l'équation. Ces trois intégrales ne sont pas distinctes quand (1) est de la classe d'une équation à coefficients constants; on reconnaît algébriquement si l'intégrale d'une telle équation

$$\frac{dy}{y^3 + a_0 y^2 + b_0 y^2 + c_0} = \mathrm{N}(x)\,dx = d\mathrm{X}$$

est une fonction à trois valeurs de X, et l'équation s'intègre alors par une quadrature.

On serait arrivé aux mêmes conclusions en se servant de la forme réduite

$$\mathrm{Y}' = \mathrm{Y}^3 + \mathrm{J}(\mathrm{X})$$

de l'équation (1). En identifiant cette équation avec celle qui se déduit de l'équation de Riccati par la substitution

$$\gamma = \frac{y^3 + \mathrm{A}y^2 + \mathrm{B}y}{\mathrm{C}y + 1},$$

on trouve, si l'on élimine M, N, P, A, B, C, que J vérifie la relation

$$(a) \qquad 7\frac{J'J''}{J^4}\frac{J^5}{J'^3}-9=\frac{18}{5}\sqrt{7}\left(\frac{J^5}{J'^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Une équation de cette forme définit, comme nous le savons, les invariants J d'une même classe d'équations (1) ($\nu=3$). Elle s'intègre sans difficulté ainsi que l'équation en y correspondante. Si l'on ramenait par une substitution

$$Y=\alpha Y_1, \qquad X=\varphi(X_1)$$

l'équation à la forme canonique de seconde espèce

$$\frac{dY_1}{dX_1}=A(X_1)\left(Y_1^3-\frac{X_1}{3}Y_1+1\right),$$

on trouverait

$$X_1=\frac{1}{J^{\frac{5}{3}}}\frac{dJ}{dX}$$

et

$$A=J^{\frac{2}{3}}\frac{dX}{dX_1};$$

par suite, d'après (a),

$$\frac{1}{A}=\frac{2}{\sqrt{7}}X_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{9}{5}-\frac{4}{3\sqrt{7}}X_1^{\frac{3}{2}}\right).$$

L'équation cherchée est donc

$$\frac{dY_1}{dX_1}=\frac{\sqrt{7}}{2X_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{9}{5}-\frac{4}{3\sqrt{7}}X_1^{\frac{3}{2}}\right)}\left(Y_1^3-\frac{X_1}{3}Y_1+1\right).$$

Elle s'intègre algébriquement.

Cette réduction n'est impossible que si $\frac{J'^3}{J^5}$ est égal à une constante k, c'est-à-dire si l'équation se ramène à une équation à coefficients constants. Cette constante doit être telle que $\frac{J'^3}{J^5}=k$ satisfasse à l'équation (a); il faut pour cela et il suffit que k soit égal à $\frac{3^6.7}{2^4.5^2}$.

9. Nous avons dit tout à l'heure que, chaque fois que ν n'était pas égal à $2n$, on connaissait sans intégration au moins une intégrale de l'équation (1) et par suite de l'équation de Riccati à laquelle elle se ramène. Le fait, comme nous l'avons remarqué dans l'exemple $\nu = 5$, $n = 3$, est une conséquence même de la marche du calcul. Voici comment on peut le démontrer directement.

L'intégrale de (1) est donnée par une égalité

$$(\alpha) \qquad \frac{y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_1 y}{b_{n-1} y^{n-1} + \ldots + b_0} = \gamma = \frac{hC + h_1}{kC + k_1};$$

γ vérifie une équation

$$(\beta) \qquad \gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P,$$

où nous pouvons toujours supposer $M \neq 0$, sinon on changerait y en $\frac{1}{y}$, et γ se changerait en $\frac{1}{\gamma}\cdot$ Dans ces conditions, l'équation $(\beta)'$, transformée de (β) par la substitution (α)

$$(\beta)' \qquad P(y, x) y' = Q(y, x),$$

a son second membre de degré $2n$, et l'ordre de son coefficient différentiel ne peut s'abaisser que si P et Q renferment au moins un facteur commun $(y - c)^q$. D'autre part, si ce facteur figure dans P à la puissance r, $(r + 1)$ valeurs de y deviennent égales à a, pour la valeur correspondante de γ. Donnons à x une valeur quelconque; l'intégrale de (1) qui prend pour x la valeur $c(x)$ n'admet ce point x que comme point de ramification d'ordre $r - q + 1$, c'est-à-dire que les $(r - q + 1)$ branches de cette intégrale constituent toutes les fonctions de x qui satisfont à l'équation (1) et prennent en x la valeur c. Mais, d'autre part, l'équation (α) définit $(r + 1)$ fonctions de x qui jouissent de ces propriétés; ces $(r + 1)$ fonctions coïncident donc avec les $(r - q + 1)$ précédentes; autrement dit, l'équation (α) se décompose. Mais, par hypothèse, l'équation (α) est irréductible, c'est-à-dire qu'elle ne se décompose que pour des valeurs exceptionnelles de la constante C. Donc $\gamma(c)$ correspond à une valeur invariable de C quand x varie;

$$y = c$$

est donc une intégrale de (1);

$$\gamma = \frac{c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_1 c}{b_{n-1}c^{n-1} + \ldots + b_1 c + 1}$$

est une intégrale de (β) (¹). C. Q. F. D.

Donc chaque fois que ν ne sera pas égal à $2n$, l'équation (1) s'intégrera par quadratures. On connaîtra même en général plusieurs intégrales de l'équation de Riccati. Cherchons d'abord à distinguer les cas où l'on n'en connaîtra qu'une seule.

Nous pouvons toujours admettre que cette intégrale soit $y = 0$ [sinon on changerait y en $y + y_0(x)$] et que $y = \infty$ ne soit pas une intégrale; dans ces conditions, γ dépend toujours de la constante C, et nous avons

$$\gamma = \frac{y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_\lambda y^\lambda}{b_{n-1}y^{n-1} + \ldots + 1},$$

$$\gamma' = \mathrm{M}\gamma^2 + \mathrm{N}\gamma \qquad (\mathrm{M} \neq 0).$$

En formant l'équation en y, on voit aussitôt que le coefficient de y' (de degré $2n - 2$ au plus) contient en facteur $y^{\lambda-1}$, tandis que le second membre de l'équation est divisible par y^λ. Donc, si les deux membres n'ont pas d'autres facteurs communs, on a

$$2n - \lambda + 1 = \nu$$

ou encore

$$\lambda = 2n + 1 - \nu.$$

Comme λ est au plus égal à n, ce cas ne peut se présenter que si n est inférieur ou au plus égal à $\nu - 1$.

Passons aux équations (1) pour lesquelles on connait seulement deux intégrales particulières. Nous pouvons admettre que ces deux intégrales soient

$$y = 0, \qquad y = \infty.$$

Si ces intégrales correspondent à deux valeurs de la constante C, γ dé-

(¹) On peut rattacher cette proposition au théorème déjà connu d'Euler : *On obtient une intégrale d'une équation du premier ordre en annulant son facteur intégrant. Voir* le Mémoire de M. Darboux *Sur les équations différentielles du premier ordre* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1878).

pend de C, et l'on a

$$\gamma = \frac{y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_\lambda y^\lambda}{b_p y^p + \ldots + 1}$$

$(p < n - 1)$, avec $\frac{\gamma'}{\gamma} = \mathrm{N}$.

Si ces intégrales correspondent à la même valeur de C, on peut poser

$$\gamma_i = \frac{y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_0}{y^\lambda(b_{p-\lambda}y^{p-\lambda} + \ldots + b_0)}$$

avec $\gamma'_i = \mathrm{N}\gamma_i + \mathrm{P}$, $(p < n - 1)$.

Dans les deux cas, on trouve

$$\nu = n + p - \lambda + 2.$$

Toutes les équations qui n'appartiennent pas aux mêmes classes que ces équations que nous venons d'énumérer s'intègrent algébriquement. D'une manière générale, si $y = \alpha_i(x)$ est une intégrale multiple d'ordre λ_i, on a

$$\nu = 2n - \Sigma(\lambda_i - 1);$$

cette égalité est analogue à celle qu'a donnée M. Darboux pour les intégrales algébriques.

Appliquons rapidement ces remarques à l'exemple $\nu = 4$, $n = 3$. On connaitra en général deux intégrales de l'équation (1), soit $y = 0$, $y = \infty$. Si ces intégrales correspondent à deux valeurs de C, on a

$$\frac{y^2(y + \mathrm{A})}{\mathrm{B}y + 1} = \gamma, \qquad \frac{\gamma'}{\gamma} = \mathrm{N};$$

donc

$$\frac{y'}{y} + \frac{y' + \mathrm{A}'}{y + \mathrm{A}} - \frac{\mathrm{B}y' + \mathrm{B}'y}{\mathrm{B}y + 1} = \mathrm{N}$$

ou

$$\begin{aligned} &y'[2\mathrm{B}y^2 + (\mathrm{AB} + 3)y + \mathrm{A}] \\ &\quad = \mathrm{N}y(y + \mathrm{A})(\mathrm{B}y + 1) + \mathrm{B}'y(y + \mathrm{A}) - \mathrm{A}'y(\mathrm{B}y + 1). \end{aligned}$$

Comme on dispose encore du changement de fonction $y = \alpha y_1$, on peut supposer $\mathrm{AB} = -1$. D'autre part, si l'on prend comme forme canonique des équations ($\nu = 4$) la forme suivante

$$\frac{dY}{dX} = K(X) \frac{Y^3 + J_2 Y^2 + J_1 Y + J_0}{\left(I_2 Y^2 + Y - \frac{1}{2 I_2}\right)}$$

(l'un des J étant égal à X), l'équation qui précède nous permet d'écrire aussitôt les conditions auxquelles sont assujettis ces invariants K, J_2, J_1, J_0. Le cas où les deux intégrales $y = 0$, $y = \infty$ correspondent à la même valeur de C se traite aussi aisément.

Pour que les racines du dénominateur soient égales, il faut que B et A (liés par la condition $AB = -1$) soient constants; l'équation se ramène alors par une quadrature aux équations à coefficients constants. La quadrature qui reste à effectuer doit être algébrique.

On formerait de même, à l'aide des égalités

$$\gamma = \frac{By + 1}{y^2},$$
$$\gamma' = N\gamma + P,$$

les types des équations $\nu = 4$, $n = 3$, pour lesquelles les deux intégrales connues se confondent.

10. Je n'insiste pas davantage sur ces applications particulières. Elles suffisent à montrer comment l'introduction de la substitution

$$(3) \qquad y = \frac{h y_1 + h_1}{k y_1 + k_1}, \qquad x = \varphi(x_1)$$

rend relativement faciles des calculs qui autrement seraient inextricables.

Cette transformation rend d'ailleurs les mêmes services quand l'équation (1), au lieu d'être résolue par rapport à y', est de genre p quelconque.

Cherchons à reconnaître si l'intégrale de l'équation

$$(1') \qquad F[y, y', (x)] = 0$$

ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales étant nul.

L'intégrale s'écrit alors

$$P_n(\gamma, x)y^n + P_{n-1}(\gamma, x)y^{n-1} + \ldots + P_0(\gamma, x) = 0;$$

les P_i sont des polynômes en y de degré m (si m est le degré de F en y'), et la fonction γ est définie par l'équation

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

Le coefficient de la plus haute puissance de y' dans F est de degré $\nu - 2m$, quand on fait subir à cette équation la transformation (3) la plus générale, ν est le *degré* du coefficient différentiel, par définition. Si le coefficient a une racine infinie d'ordre α, P_n et P_{n-1} ont α facteurs communs en γ. De même, si ce coefficient a une racine nulle d'ordre β, P_0 et P_1 ont β facteurs communs. Quand les coefficients de y^m, y^{m-1}, y^{m-2} admettent la racine $y = 0$, les polynômes P_0, P_1, P_2, ... admettent un facteur commun, etc.

Par exemple, si $m' = 2$ et $n = 2$, on peut toujours se servir de la transformation (3) pour rendre nulle et infinie deux racines du coefficient de y'^n. Dans ces conditions, l'intégrale s'écrira

$$\frac{A\gamma + B}{C\gamma + D} y^2 + y + \gamma = 0$$

ou bien

$$\gamma y^2 + y + \frac{A\gamma + B}{C\gamma + D} = 0$$

avec

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

Cette forme de l'intégrale se prête à des calculs assez simples. On peut se rendre compte, avec elle, de la nature des équations les plus générales de cette espèce. Le degré de leur coefficient différentiel est au plus égal à 8, c'est-à-dire que leur équation s'écrit

$$y'^2 A_4[y, (x)] + y' A_6[y, (x)] + A_8[y, (x)] = 0,$$

A_4, A_6, A_8 désignant des polynômes en y de degré 4, 6, 8.

Quand l'équation ($m' = 2$, $n = 2$) est d'une forme plus simple, on connaît en général des intégrales particulières de l'équation de Riccati auxquelles on la ramène. Le raisonnement que nous avons employé au paragraphe précédent est, en effet, susceptible d'extension. Toutefois, les choses se passent ici d'une façon plus compliquée, à cause de la double nature des points critiques de l'équation (1), points où $\frac{dy}{dx}$ est infinie, et points où $\frac{dy}{dx}$ est indéterminée. La recherche de la limite inférieure de n, au delà de laquelle l'équation de Riccati s'intègre par quadratures, nécessite une discussion détaillée [1] qui nous entraînerait trop loin des équations rationnelles en y', auxquelles nous bornerons ces applications.

CHAPITRE VI.

INTÉGRALES ALGÉBRIQUES DES ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

1. Une fois reconnu que l'intégrale d'une équation

$$F[y, y', (x)] = 0 \tag{1}$$

ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, nous avons indiqué, à la fin du Chapitre IV, quelles conditions doivent être encore remplies pour que l'intégrale ne prenne, dans tout le plan, qu'un nombre fini de valeurs. Il faut que l'équation à points critiques fixes

$$h\left[r, \frac{dr}{dx}, (x)\right] = 0, \tag{2}$$

à laquelle on ramène l'équation (1), ait pour intégrale une fonction à ν valeurs. Étudions quelles simplifications apporte, dans ce nouveau problème, l'hypothèse que $y(x)$ est une fonction algébrique.

Il est nécessaire et suffisant, pour cela, que l'intégrale de (2) soit

[1] *Voir* à ce sujet une Note *Sur l'intégration algébrique des équations du premier ordre* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, mai 1891), et deux Notes *Sur les intégrales à n valeurs des équations du premier ordre* (*Comptes rendus*, janvier et février 1892).

algébrique. Si le genre ϖ de (2) est supérieur à l'unité, l'équation (2) s'intègre algébriquement : il suffit donc que les coefficients de (2), par suite de (1), soient algébriqnes, en x.

Si $\varpi = 1$, on transforme l'équation (2) en la suivante

$$(3) \qquad \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \mathrm{H}(x)\,dx;$$

$\int \mathrm{H}(x)\,dx$ doit être une intégrale abélienne de première espèce d'une certaine courbe algébrique. Il faut, de plus, que cette intégrale se ramène aux intégrales elliptiques de module k^2.

Quand $\varpi = 0$, on substitue à l'équation (2) une équation de Riccati

$$(4) \qquad t' = \mathrm{M}t^2 + \mathrm{N}t + \mathrm{P}.$$

Il faut et il suffit que l'intégrale de cette équation soit algébrique. Par des procédés analogues à ceux qu'on emploie dans la théorie des équations différentielles linéaires (¹), on détermine s'il en est ainsi (et l'équation s'intègre alors algébriquement), ou l'on ramène l'équation à une quadrature

$$\frac{t'}{t} = \mathrm{K}(x).$$

Nous voyons ainsi que *la question de reconnaître si l'intégrale d'une équation* (1), *qui ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, est algébrique, se résout algébriquement ou se ramène au problème de la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques ou logarithmiques.*

Quand on se donne le nombre N de valeurs que la fonction algébrique $y(x)$ peut acquérir dans tout le plan, la question se résout complètement dans le cas de $\varpi = 0$.

On sait décider, en effet, si l'intégrale de l'équation

$$\frac{t'}{t} = \mathrm{K}(x)$$

est une fonction algébrique à ν valeurs.

(¹) *Voir*, par exemple, à ce sujet, diverses Notes que j'ai publiées dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (juin, juillet 1887, janvier 1888).

Pour que le cas de $\varpi = 1$, le problème n'est guère simplifié. Écrivons l'équation (2) en exprimant la fonction algébrique $H(x)$ à l'aide des coordonnées (x, ξ) de la courbe algébrique dont elle définit une intégrale abélienne,

$$H(x) = R(x, \xi),$$

avec la condition

$$f(x, \xi) = 0;$$

on a

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = R(x, \xi)\,dx.$$

Si l'intégrale de cette équation $t(x)$ est algébrique, on sait que l'intégrale t_1 de l'équation

$$\frac{dt_1}{\sqrt{(1-t_1^2)(1-k^2t_1^2)}} = r\,R(x, \xi)\,dx,$$

pour une certaine valeur de l'entier r, est une fonction rationnelle de (x, ξ). Si l'on se donne une limite du nombre des valeurs de t, on se donne, par le fait même, une limite du nombre r, et le problème se trouve ramené ainsi à reconnaître si l'intégrale d'une certaine équation

$$\frac{dt_1}{\sqrt{(1-t_1^2)(1-k^2t_1^2)}} = R_1(x, \xi)\,dx$$

a son intégrale rationnelle en (x, ξ).

En résumé, *on sait reconnaître si l'intégrale de l'équation* (1) *est une fonction algébrique* $y(x)$ *à* N *valeurs, ou l'on ramène l'équation* (1) *à la suivante*

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = R(x, \xi)\,dx \qquad [\text{avec } f(x, \xi) = 0],$$

et l'intégrale de cette équation doit être rationnelle en (x, ξ).

En particulier, quand le genre p de (1) est nul, notamment quand l'équation (1) est résolue par rapport à y', le problème que nous venons d'énoncer se résout toujours algébriquement.

2. Plaçons-nous maintenant dans le cas où l'on ne se donnerait ni n, ni N, autrement dit, cherchons à traiter, sous sa forme la plus générale, la question de savoir si l'intégrale de l'équation (1) est algébrique.

Dans ces conditions, y ne joue plus nécessairement le rôle de fonction par rapport à x; on peut permuter les deux variables et effectuer dans (1) une transformation algébrique quelconque portant sur ces variables, par exemple, la transformation homographique la plus générale

$$x = \frac{a x_1 + b y_1 + c}{a'' x_1 + b'' y_1 + c''}, \qquad y = \frac{a' x_1 + b' y_1 + c'}{a'' x_1 + b'' y_1 + c''}.$$

Admettons qu'on ait fait subir effectivement à x et y cette transformation. L'équation (1), irréductible, a alors pour premier membre un polynôme en y, y' et x. L'intégrale de (1), si elle est algébrique, s'écrira

$$A x^n + B x^{n-1} y + \ldots + L y^n = 0,$$

ou encore

$$y^n + R_{(n-1)}(y_0, y'_0, x_0, x) y^{n-1} + \ldots + R_0(y_0, y'_0, x_0, x) = 0.$$

La fonction $y(x)$ est une fonction algébrique à n valeurs, sans points critiques fixes; les R_i désignent des fonctions rationnelles de y_0, y'_0, x_0, x. On déduit de là (comme on l'a fait au Chapitre I) que l'intégrale de (1) se laisse mettre d'une infinité de manières sous la forme

$$\rho(y, y', x) = \gamma,$$

ρ étant rationnel en y, y', x; on peut choisir deux telles *constantes intégrales* γ et γ_1, liées par la relation

$$H(\gamma, \gamma_1) = 0, \tag{5}$$

de telle façon que toutes les autres s'expriment rationnellement en γ, γ_1. Quand le genre ϖ de la relation (5) est supérieur à l'unité, l'équation (1) s'intègre algébriquement.

Quand $\varpi = 1$, l'intégrale vérifie une relation telle que

$$J(y, y', x) = \lambda_1(x) J_1 + \lambda_2(x) J_2 + \ldots + \lambda_p J_p = K(x) + C; \tag{6}$$

les λ_i désignent des fonctions rationnelles de x, J une des p intégrales de première espèce attachées à la courbe en y, y'

$$F[y, y', (x)] = 0.$$

Les λ_i et $\frac{d\lambda_i}{dx}$ satisfont, comme nous l'avons dit, à un système d'équations linéaires et homogènes dont l'intégrale dépend au plus de $(p-1)$ constantes arbitraires. On sait déterminer algébriquement toutes les intégrales rationnelles d'un pareil système. Nous savons donc calculer algébriquement toutes les intégrales J, qui répondent à la condition (6), et l'équation (1) se trouve alors intégrée, en posant

$$\mathrm{J}(y, y', x) = \int_{y_0}^{y} \mathrm{Q}[y, y', (x)]\, dy,$$

par la quadrature

$$\int \mathrm{Q}\, dy + y'\mathrm{Q}\, dx = \text{const.};$$

y' dans cette différentielle totale désigne la fonction de x, y définie par (1).

On peut dire encore que la substitution

$$\gamma = \rho(y, y', x),$$
$$\gamma_1 = \rho_1(y, y', x)$$

transforme l'intégrale

$$\int \frac{d\gamma}{\sqrt{(1-\gamma^2)(1-k^2\gamma^2)}},$$

en une intégrale de première espèce $\int \mathrm{P}\, dx + \mathrm{Q}\, dy$ de la surface

$$\mathrm{F}(y, y', x) = 0,$$

et la recherche de ces intégrales, comme l'a montré M. Picard, s'effectue algébriquement. L'intégrale générale de l'équation (1) est alors donnée par la quadrature

$$\int \mathrm{P}\, dx + \mathrm{Q}\, dy = \text{const.}$$

Remarquons que, quand ϖ est supérieur à 1, pour une équation (1) de degré donné en y, y', x, le degré n de la relation algébrique entre y et x ne peut dépasser une certaine limite qu'indique l'égalité

$$n = \frac{p-1}{\varpi - 1}.$$

Quand $\varpi = 1$, au contraire, n peut dépasser tout entier donné.

Nous arrivons ainsi aux conclusions suivantes : *On reconnaît algébriquement si l'intégrale de* (1) *est une fonction algébrique correspondant* *à une valeur du nombre ϖ différente de* o, *ou bien on intègre l'équation* (1) *par une quadrature de différentielle totale*

$$\int \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy = \text{const.};$$

la différentielle totale ($\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy$) *se calcule d'ailleurs algébriquement.*

Si l'intégrale $y(x)$ est algébrique, la différentielle $\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy$ doit être une différentielle totale de première espèce attachée à la surface $\mathrm{F} = 0$, dont les périodes se réduisent à deux.

Le cas de $\varpi = 0$ échappe complètement à la méthode. C'est le seul cas qui puisse se présenter quand le genre p de la relation

$$\mathrm{F}(y, y', x) = 0,$$

entre y et y', est nul. On peut alors, en posant

$$y = \varphi(t, x),$$
$$y' = \psi(t, x),$$

ramener l'équation à la forme

$$\frac{dt}{dx} = \mathrm{R}(t, x). \tag{7}$$

R, φ, ψ sont rationnels en t et en x, puisque F est un polynôme en y, y', x. Plus généralement, l'équation se ramènera à la forme (7) si les coordonnées y, y', x de la surface $\mathrm{F} = 0$ s'expriment rationnellement à l'aide de deux paramètres t et u. Nous allons traiter quelques problèmes particuliers relatifs à ces équations (7) pour lesquelles la méthode précédente est toujours en défaut.

3. Soit donc une équation

$$y' = \mathrm{R}(y, x) = \frac{\mathrm{P}(y, x)}{\mathrm{Q}(y, x)}, \tag{8}$$

où P et Q sont deux polynômes en x, y, de degré q. Si son intégrale est algébrique, elle peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{M}(y, x)}{\mathrm{N}(y, x)} = \mathrm{A}, \tag{9}$$

A désignant une constante, M et N deux polynômes en y, x, de degré m.

Dans l'étude que nous avons faite au Chap. V des équations telles que (8), y devait être regardée comme la fonction, x comme la variable. La transformation la plus générale qui conservait à l'équation sa forme et à y son nombre de valeurs était la suivante

$$y = \frac{hy_1 + h_1}{ky_1 + k_1}, \qquad x = \varphi(x_1).$$

Les points singuliers ou critiques de l'équation différentielle correspondaient à toutes les valeurs de (y, x) rendant y' infinie ou indéterminée. Dans les questions qui nous occupent maintenant, y et x jouent un rôle symétrique et nous pouvons effectuer sur l'équation (8) une transformation rationnelle quelconque en x_1, y_1, par exemple une transformation de Cremona, sans que l'équation (8) perde sa forme et sans que son intégrale cesse d'être algébrique. Il nous est loisible notamment, comme nous l'avons déjà remarqué, d'opérer sur x, y la transformation homographique la plus générale

$$x = \frac{ax_1 + by_1 + c}{a''x_1 + b''y_1 + c''}, \qquad y = \frac{a'x_1 + b'y_1 + c'}{a''x_1 + b''y_1 + c''}.$$

Dans ces conditions, les points singuliers *intrinsèques* de l'équation (1) sont les points (x_i, y_i) ou M_i, où P et Q s'annulent à la fois; il y aura des points singuliers à l'infini si l'équation transformée de (8) par l'une des transformations

$$x = \frac{1}{z}, \qquad y = \frac{y_1}{z},$$

ou

$$x = \frac{x_1}{z}, \qquad y = \frac{1}{z},$$

admet des points singuliers dont le z soit nul. On peut toujours supposer qu'aucun des points singuliers n'est à l'infini. Leur nombre est alors égal à $q^2 - q + 1$ (1).

Si l'on effectue une transformation homographique, les points singuliers de l'équation transformée et de la primitive se correspondent.

(1) *Voir* le Mémoire déjà cité de M. Darboux, *Sur les équations différentielles du premier ordre* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1878).

Il suffirait d'ailleurs, pour éviter toute difficulté relative aux points à l'infini, d'employer la notation homogène de Clebsch et d'écrire l'équation (8) sous la forme

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ S & T & U \end{vmatrix} = 0,$$

S, T, U étant des polynômes homogènes de degré $q - 1$ en x, y, z.

Ceci posé, revenons à l'intégrale (9) de l'équation (8). A chaque valeur de A correspond une courbe C de degré m. Par un point x, y du plan des x, y passe une courbe C et une seule, à moins que ce point ne soit un des points M_i. D'après cela, les points communs à deux courbes C quelconques, ainsi que les points multiples de ces courbes, font partie des points M_i; deux courbes C quelconques ont d'ailleurs m^2 points communs (en tenant compte de leur degré de multiplicité).

La méthode de Briot et Bouquet permet d'autre part d'étudier dans le voisinage de x_i les intégrales y qui deviennent égales à y_i pour $x = x_i$. En premier lieu, x_i doit être un point algébrique de ces intégrales. De plus, parmi les points M_i, un au moins doit être commun à toutes les courbes C. Considérons seulement les points M'_i qui jouissent de cette propriété, c'est-à-dire les *nœuds* de l'équation (8) d'après la terminologie de M. Poincaré. Les autres points M_i sont des *cols*.

Les intégrales $y(x)$ égales à y_i pour $x = x_i$ se divisent en un certain nombre δ de classes; une intégrale de chaque classe est de la forme

$$y = a_0 x^{\frac{p}{q}} + a_1 x^{\frac{p+1}{q}} + \ldots,$$

$a_0, a_1, \ldots$ dépendant d'une constante, p et q étant des entiers. Une branche au moins de chaque classe fait partie d'une quelconque des courbes C, et l'on a ainsi une limite inférieure de l'ordre de multiplicité du point (x_i, y_i) des courbes C. Mais λ branches de la même espèce peuvent appartenir à la même courbe C. Si donc μ désigne l'ordre de multiplicité d'une seule branche, la somme $\Sigma\lambda\mu$ étendue aux δ classes donne l'ordre de multiplicité du point M_i des courbes C. Il est facile également de calculer en fonction des nombres λ (qu'on ne saurait en général déterminer *a priori*) l'ordre de multiplicité α_i de l'intersection de deux courbes C en M_i. On doit avoir

$$(a) \qquad \Sigma \alpha_i = m^2.$$

Cette égalité permet de résoudre la question suivante : *Reconnaître si l'intégrale d'une équation* (1) *est une courbe algébrique dont les points multiples n'admettent pas plus de* β *branches distinctes* (β *est donné*).

On sait calculer, en effet, une limite supérieure de m^2.

Une égalité analogue permet de reconnaître si l'équation (1) admet *plus d'une* intégrale particulière dont les points multiples aient au plus β branches distinctes. Il suffit de considérer tous les points M_i par lesquels passe plus d'une branche de courbe C, et de raisonner sur ces points comme nous venons de le faire sur les points M'_i. Un cas intéressant est celui où il n'existe aucun point M'_i, c'est-à-dire aucun point commun à toutes les branches de courbes. La question se résout alors sans connaître β ; la somme $\Sigma\alpha_i$ et, par suite, m^2 ne sauraient dépasser une certaine limite.

Par exemple, considérons l'équation

$$y' = \frac{2x^3 + x^2 - y^2}{2x^2 y}.$$

Cette équation n'admet qu'un point M_i ($x=0, y=0$), et, en ce point, la méthode de Briot et Bouquet nous montre qu'il ne passe que deux intégrales

$$y = +x + \ldots,$$
$$y = -x + \ldots.$$

L'équation ne saurait donc admettre que deux intégrales algébriques qui ont un point d'intersection unique, d'ordre de multiplicité égal à 1. Ces intégrales, si elles existent, sont donc des droites ; on vérifie, en effet, que $y = +x$, $y = -x$ sont deux intégrales de l'équation dont l'intégrale générale s'écrit

$$y^2 = x^2 + C e^{\frac{1}{x}}.$$

Revenons maintenant à l'étude des équations (8), dont l'intégrale générale est algébrique. Nous pouvons établir d'autres relations entre le degré des courbes C et les ordres de multiplicité de leurs points multiples.

Calculons, en effet, la classe d'une courbe C en nous servant de la première formule de Plücker

$$c = m(m-1) - 2d - 3r.$$

Il nous faut tenir compte de l'ordre de multiplicité des points M'_i : nous obtenons ainsi la valeur de c en fonction des λ.

D'autre part, considérons l'équation

$$y'_0 = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \tag{10}$$

Le nombre des points d'intersection de la courbe (10) avec une courbe C, abstraction faite des points M'_i, représente le nombre de tangentes parallèles à la direction y'_0, qu'on peut mener à une courbe C. Ce nombre coïncide avec la classe c de la courbe C; il n'en différerait, en effet, que si la droite de l'infini était tangente à toutes les courbes C, et nous avons fait subir à x, y la transformation homographique la plus générale, qui rend la droite de l'infini quelconque par rapport aux courbes C.

Soit donc q le degré en x, y des deux polynômes P, Q ou, si l'on veut, de la courbe (10). Toutes les courbes (10) passent par les points M'_i, et nous savons calculer l'ordre de multiplicité en un point M'_i de l'intersection de chaque branche de courbe C avec la courbe (10); nous connaissons donc, en fonction des λ, l'ordre de multiplicité γ_i de l'intersection en un point M'_i d'une courbe C avee la courbe (10). Nous avons

$$qm - \Sigma\gamma_i = c, \tag{b}$$

la somme $\Sigma\gamma_i$ s'étendant à tous les points M'_i. Nous obtenons ainsi une nouvelle relation entre les nombres λ et m.

De même, en calculant le nombre des points d'inflexion d'une part d'après les formules de Plücker, d'autre part d'après l'équation différentielle, on obtient une nouvelle relation, analogue à la précédente, entre m et les λ.

Il convient de joindre à ces trois égalités, l'inégalité

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} - d \geqq 0, \tag{c}$$

d désignant toujours le nombre de points doubles équivalent aux points multiples M'_i. Cette condition est nécessaire, mais non suffisante pour que les courbes C soient indécomposables.

4. Ces égalités permettent, dans des cas très étendus, de résoudre le problème suivant : *Reconnaître si l'intégrale générale d'une équation* (8) *est algébrique et de genre donné*. Nous appelons *genre de l'intégrale* le genre des courbes C. Quand ce genre p est donné, l'inégalité (c) se transforme en l'égalité

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} - 2d = p.$$

I. Supposons d'abord que tous les points M'_i soient des points d'intersection simples de deux branches d'intégrales. Nous donnerons à ces points, avec M. Autonne, le nom de *points dicritiques* [1]. Ces points peuvent, d'ailleurs, être des points d'intersection multiples des courbes $P = 0$, $Q = 0$.

L'égalité (a) nous donne

$$(a) \qquad m^2 = \Sigma\lambda^2,$$

et, si k_i désigne l'ordre de multiplicité le moins élevé du point M'_i sur les deux courbes $P = 0$, $Q = 0$, l'égalité (b) s'écrit

$$(b) \qquad m(m-1) - \Sigma\lambda_i(\lambda_i - 1) = qm - \Sigma k_i\lambda_i,$$

ou bien, en tenant compte de (a),

$$\Sigma(k_i + 1)\lambda_i = (q+1)m.$$

Joignons à ces égalités la suivante

$$(m-1)(m-2) - \Sigma\lambda_i(\lambda_i - 1) = 2p,$$

ou, en tenant compte de (a),

$$(d) \qquad \Sigma\lambda_i - 3m = 2(p-1).$$

---

[1] *Voir* les deux Mémoires de M. Autonne sur les équations différentielles du premier ordre (*Journal de l'École Polytechnique*, 1891; *Annales de la Faculté des Sciences de Lyon*, 1892).

Il vient, en éliminant m entre (b) et (d),

$$(e) \qquad \Sigma(q-2-3k_i)\lambda_i = 2(p-1)(q+1).$$

Si tous les k_i sont inférieurs à $\frac{q-2}{3}$, tous les coefficients des λ_i sont positifs; p est nécessairement plus grand que 1, et l'égalité (e) nous fournit une limite supérieure de $\Sigma\lambda_i$, par suite de m.

Si tous les k_i sont supérieurs à $\frac{q-2}{3}$, p est nécessairement nul, et l'égalité (e) nous fournit une limite supérieure de m.

Si, notamment, tous les k_i sont égaux, trois cas sont possibles :

1° $3k_i = q-2-l\,(l>0)$; on a alors

$$l\Sigma\lambda_i = 2(p-1)(q+1)$$

et

$$m = \frac{2(q+1-l)}{3l}(p-1).$$

2° $3k_i = q-2$; dans ce cas, le genre p est nécessairement égal à 1, et les égalités précédentes ne limitent plus le degré m.

3° $3k_i = q-2+l\,(l>0)$; p est nécessairement nul, et l'on a

$$\Sigma\lambda_i = \frac{2(q+1)}{l} \qquad \text{et} \qquad m = \frac{2(q+l+1)}{3l}.$$

Dans ce dernier cas, les égalités employées suffisent à résoudre le problème : *Reconnaître si l'intégrale générale de l'équation* (8) *est algébrique.*

Il convient de signaler *le cas où tous les points seraient des points d'intersection simples des courbes* $P=0$, $Q=0$, c'est-à-dire où tous les k_i seraient égaux à 1. L'égalité (e) deviendrait alors

$$(q-5)\Sigma\lambda_i = 2(p-1)(q+1)$$

et, par suite,

$$m = \frac{4(p-1)}{(q-5)}.$$

Si q est plus grand que 5, p est nécessairement plus grand que 1; *si* $q=5$, p est égal à l'unité et m n'est plus déterminé; *si q est plus petit* *que* 5, p est nul, et m est égal à 4 (si $q=4$), à 2 (si $q=3$), à 1 (si $q=1$).

II. Un autre cas très général, que nous allons traiter maintenant, est celui *où tous les nœuds* M' *sont des points simples d'intersection des courbes* $P=0$, $Q=0$.

Soit $x_i=0$, $y_i=0$ un des points M'_i; dans le voisinage de ce point, on a

$$y' = \frac{\alpha x + \beta y + \dots}{\alpha' x + \beta' y + \dots},$$

avec la condition

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1,$$

puisque les courbes $P=0$, $Q=0$ ne sont pas tangentes. La méthode de Briot et Bouquet conduit à poser

$$y = x(a+t),$$

a satisfaisant à l'égalité

$$\alpha + (\beta - \alpha')a - \beta' a^2 = 0.$$

La valeur de a n'est indéterminée que si α, β' et $(\beta-\alpha')$ sont nuls : le point M'_i est alors un point dicritique, et, dans le voisinage de ce point, y se laisse développer ainsi :

$$y = cx + c_1 x^2 + c_2 x^3 + \dots,$$

c désignant une constante arbitraire, dont dépendent $c_1, c_2, \dots$. Ce cas écarté, toutes les branches de courbes intégrales sont tangentes à deux directions $y=a_1 x$, $y=a_2 x$, qu'on peut prendre comme axes des x et des y, ce qui revient à annuler α et β'; l'équation (8) s'écrit alors

$$y' = \frac{\beta y + \gamma x^2 + \dots}{\alpha' x + \gamma' x^2 + \dots}.$$

Pour que le point soit un nœud algébrique, il faut que $\frac{\beta}{\alpha'}$ soit un nombre réel, positif et commensurable $\frac{\mu}{\nu}$, qu'on peut toujours supposer plus grand que 1; sinon on permuterait x et y. Toutes les courbes intégrales sont tangentes à l'axe des x et leur équation s'écrit

$$y = cx^{\frac{\mu}{\nu}} + c_1 x^{\frac{\mu+1}{\nu}} + c_2 x^{\frac{\mu+2}{\nu}} + \dots.$$

c désignant une constante arbitraire dont dépendent c_1, c_2, ... Une branche *isolée* est tangente à l'axe des y, ainsi qu'il résulte immédiatement de la discussion de Briot et Bouquet. Le cas exceptionnel où a_1 et a_2 sont confondus ne saurait se présenter quand l'intégrale est algébrique : en effet, si nous prenons la droite $y = a_1 x$ comme axe des x, α et $(\beta - \alpha')$ sont nuls, et l'équation (8) devient

$$y' = \frac{y + \gamma x^2 + \ldots}{x + ky + \ldots}.$$

Mais l'origine est un point transcendant des intégrales de cette équation quand k n'est pas nul; si $k = 0$, le nœud est dicritique.

En définitive, par chaque nœud $x_i = 0$, $y_i = 0$ passe une famille, et une seule, de courbes C dépendant d'une constante arbitraire; chaque branche d'intégrale se laisse développer ainsi

$$y = ax + cx^{\frac{\mu}{\nu}} + c_1 x^{\frac{\mu+1}{\nu}} + c_2 x^{\frac{\mu+2}{\nu}} + \ldots = \varphi\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right),$$

a désignant un nombre et c une constante arbitraire; toutefois, si le nœud est dicritique, le développement est de la forme

$$y = cx + c_1 x^2 + c_2 x^3 + \ldots = \varphi(x).$$

Le nombre des points d'intersection confondus en M'_i de deux branches quelconques d'intégrales est dans tous les cas égal à $\mu\nu$. On s'en rend compte rapidement ainsi : posons $x = \xi^\nu$; à chaque branche de courbes C ou $y = \varphi\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)$ correspondent ν branches γ distinctes $y = \varphi(\alpha\xi)$, α étant une des racines $\nu^{\text{ièmes}}$ de l'unité. A deux courbes C, soient C et C', correspondent ν branches γ et ν branches γ', et ces branches ont au point M'_i un contact d'ordre μ; les courbes γ ont donc, avec les courbes γ', $\mu\nu^2$ points d'intersection confondus en M'_i. D'autre part, les points d'intersection de γ et de γ' se partagent en groupes de ν points tels que ξ^ν ait la même valeur pour ces ν points. Il suit de là que les deux branches C et C' ont $\frac{\mu\nu^2}{\nu}$ ou $\mu\nu$ points communs confondus en M'_i. Quand le nœud est dicritique, $\mu = 1$, $\nu = 1$ et $\mu\nu = 1$.

Si par le point M_i passent λ branches de courbe C appartenant à la même intégrale algébrique, chacune des λ branches de l'intégrale coupe une des branches d'une autre intégrale en $\mu\nu$ points confondus en M'_i. Le nombre total des intersections confondues en M'_i est donc $\lambda^2\mu\nu$; l'égalité (a) s'écrit donc

$$(a)\qquad m^2 = \sum \lambda^2\mu\nu,$$

la somme étant étendue à tous les nœuds.

Calculons maintenant l'abaissement de la classe. Soit

$$(u)\qquad f(x,y) = 0$$

l'équation des courbes C mise sous forme entière; le point M'_i étant l'origine, les termes de degré le moins élevé sont de degré $\lambda_i\nu_i$, et dans l'équation

$$(v)\qquad f'_x + hf'_y = 0$$

les termes de degré le moins élevé sont de degré $(\lambda\nu - 1)$. Si nous posons $x = \xi^\nu$, les $\lambda\nu$ branches distinctes définies par (u) et les $(\lambda\nu - 1)$ branches distinctes définies par (v) ont deux à deux un contact d'ordre μ en M'_i; elles ont donc $\lambda\nu(\lambda\nu - 1)\mu$ points communs confondus en M'_i. Il suit de là, comme plus haut, qu'une courbe C et sa polaire (v) ont $\lambda\mu(\lambda\nu - 1)$ intersections confondues en M'_i, résultat qui se déduit d'ailleurs de formules connues.

La classe des courbes C est donc donnée par l'égalité

$$c = m(m-1) - \sum \lambda\mu(\lambda\nu - 1).$$

D'autre part, une courbe C et la courbe

$$(10)\qquad y'_0 = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

ont, en dehors des points M'_i, $\left(qm - \sum \lambda\nu\right)$ points d'intersection. L'égalité (b) est donc ici

$$m(m-1) - \sum \lambda\mu(\lambda\nu - 1) = qm - \sum \lambda\nu,$$

ou encore, en tenant compte de (a),

$$(b)\qquad \sum \lambda(\mu + \nu) = (q+1)m.$$

Calculons enfin le genre : pour chaque branche d'intégrale

$$y = \varphi\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right),$$

le point M'_i (au point de vue du genre) équivaut à $\frac{(\mu-1)(\nu-1)}{2}$ points doubles; la multiplicité de M'_i est donc égale au nombre $\frac{\lambda(\mu-1)(\nu-1)}{2}$ augmenté de $\frac{\lambda(\lambda-1)\mu\nu}{2}$, nombre des intersections confondues en M'_i qu'ont entre elles les λ branches de C. Il vient donc

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \frac{\sum \lambda^2 \mu\nu}{2} + \sum \frac{\lambda}{2}(\mu+\nu-1),$$

formule d'ailleurs connue. Si l'on tient compte de (a), on a

$$p = 1 + \sum \frac{\lambda}{2}(\mu+\nu-1) - \frac{3m}{2},$$

et, si l'on tient compte de (b),

$$(d) \qquad \left\{ \begin{aligned} p &= 1 + \sum \frac{\lambda}{2}\left[\mu+\nu-1-\frac{3(\mu+\nu)}{q+1}\right] \\ &= 1 + \sum \frac{\lambda}{2}\left[(\mu+\nu)\left(1-\frac{3}{q+1}\right)-1\right]. \end{aligned} \right.$$

Cette égalité, déjà donnée par M. Poincaré [1], *permet de reconnaître si l'intégrale générale est algébrique et de genre donné chaque fois que q est plus grand que* 5.

---

[1] M. Poincaré est parvenu à cette formule par des considérations différentes où interviennent les valeurs *remarquables* de la constante pour lesquelles l'intégrale algébrique, supposée irréductible, se décompose. (*Voir* les *Comptes rendus*, avril 1891 et les *Rendiconti del circolo math. di Palermo*, avril 1891.) J'ai indiqué la méthode générale que j'ai appliquée dans ce paragaphe dans une Note des *Comptes rendus* (mai 1890). Le dernier paragraphe de cette Note renferme une méthode différente pour reconnaître dans tous les cas si l'intégrale est algébrique et de genre donné, mais cette méthode est inexacte et repose sur une évaluation évidemment erronée du genre. Le paragraphe est à supprimer.

Plus généralement, il suffit que les coefficients des λ dans (d) soient tous de même signe.

Le genre p est nécessairement plus grand que 1 si q est supérieur à 4. Toutefois, pour $q = 5$, si tous les nœuds sont dicritiques, p est égal à 1.

Quand tous les nœuds sont dicritiques, $\mu = 1$, $\nu = 1$, on retombe sur des résultats déjà signalés.

5. Si importants que soient les cas particuliers que nous venons de traiter, on ne saurait pourtant considérer comme résolu d'une manière générale le problème que nous nous sommes posé : reconnaître si l'intégrale d'une équation (8) est algébrique et de genre donné. Quand les courbes $P = 0$, $Q = 0$ ont des points communs confondus, les égalités (a), (b), (d) ne déterminent plus nécessairement une limite de m. Il n'est pas d'ailleurs possible de transformer, à l'aide d'une substitution de Cremona, une équation (8) quelconque en une équation pour laquelle tous les points singuliers soient simples. Quoi qu'il en soit, les égalités qui nous occupent suffisent à résoudre la question posée dans des cas très nombreux, différents de ceux que nous avons considérés jusqu'ici. Par exemple, si l'équation n'admet qu'un nœud et si ce nœud est un point ordinaire de chaque branche d'intégrale, mais un point de contact d'ordre μ de deux branches quelconques, les égalités (a) et (d) s'écrivent

$$m^2 = \lambda^2 \mu,$$
$$(m-1)(m-2) - \lambda(\lambda - 1)\mu = 2p,$$

et, par suite,

$$m(\sqrt{\mu} - 3) = 2(p-1).$$

On voit que μ doit être le carré d'un nombre entier. Le genre p est nul ou plus grand que 1, suivant qu'on a $\mu < 9$ ou $\mu > 9$. Dans la première hypothèse, m est égal à $2 (\mu = 4)$ ou à $1 (\mu = 1)$; dans la seconde, m est au plus égal à $2(p-1)$. Enfin, si $\mu = 9$, on a $p = 1$, et m n'est plus limité.

Il convient de remarquer que, dans toutes les applications précédentes, les égalités employées ne déterminent *jamais* de limite supérieure de m *pour* $p = 1$. Nous verrons tout à l'heure la raison de cette singularité.

6. Il peut arriver que les mêmes égalités suffisent à *reconnaître si l'intégrale générale d'une équation* (8) *est algébrique, sans aucune condition donnée*.

Nous avons déjà rencontré un exemple de ce fait : *quand tous les nœuds sont dicritiques et quand de plus ces points sont des points multiples d'ordre plus grand que* $\frac{q-2}{3}$ *des deux courbes* $P = 0$, $Q = 0$, le genre p est nécessairement nul, et l'on connaît une limite supérieure de m. En particulier, quand les nœuds, tous dicritiques, sont des points simples de $P = 0$, $Q = 0$, pour $q < 5$, m est déterminé par l'égalité $m = \frac{4}{5-q}$.

Comme exemple assez différent, nous signalerons le cas *où les nœuds sont en nombre inférieur à* 9 *et tous dicritiques*. D'une manière précise, ces points peuvent être des points d'intersection multiples de $P = 0$, $Q = 0$, mais sont des points d'intersection simple de deux branches d'intégrales (sauf peut-être de branches isolées).

Nous avons alors l'égalité

$$m^2 = \sum \lambda^2.$$

De plus, par 9 points (parmi lesquels les nœuds) nous pouvons faire passer une cubique; il vient donc

$$3m = \sum \lambda_i + k \qquad (k \geqq 0).$$

D'autre part, l'égalité (d) donne ici

$$\sum \lambda_i - 3m = 2(p-1),$$

d'où

$$k = 2(1-p).$$

Nous voyons que p est égal à 0 ou à 1 et k égal à 2 (pour $p = 0$) ou à 0 (pour $p = 1$).

D'après cela :

1° *Si le nombre* N *des nœuds est égal à* 9, *p est nul ou égal à l'unité;*
2° *Si le nombre* N *est inférieur à* $9 (N = 9 - \alpha)$, *p est nécessairement nul.*

En effet, en prenant α des 9 points sur une des courbes intégrales, on voit que k est au moins égal à α; k n'étant pas nul est égal à α, p est nul, α est égal à 1 ou à 2. Ceci suppose toutefois que la cubique auxiliaire n'ait pas une partie commune avec la courbe intégrale : le fait ne peut se présenter que quand les courbes intégrales sont au plus du troisième degré. On trouve ainsi que l'intégrale étant supposée algébrique, le nombre N doit être égal à 8, 7, 6, 4 ou 1. Si $N = 6$, les intégrales sont des cubiques ayant un point double commun; si $N = 4$, ce sont des coniques; si $N = 1$, des droites.

Plaçons-nous successivement dans les deux hypothèses $N = 8$, $N = 7$. Des deux égalités

$$(a) \qquad 9m^2 = \sum \lambda_i^2,$$

$$(d) \qquad 3m = 2 + \sum \lambda_i,$$

on déduit

$$9 \sum \lambda_i^2 - \left(2 + \sum \lambda_i\right)^2 = 0.$$

Cette égalité peut s'écrire, si $N = 8$,

$$(e) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{8}{9}\left[\lambda_1 - \frac{1}{8}\left(2 + \sum_2^8 \lambda_i\right)\right]^2 + \frac{7}{8}\left[\lambda_2 - \frac{1}{7}\left(2 + \sum_3^8 \lambda_i\right)\right]^2 + \frac{6}{7}\left[\lambda_3 - \frac{1}{6}\left(2 + \sum_4^8 \lambda_i\right)\right]^2 \\ &\qquad + \ldots + \frac{2}{3}\left[\lambda_7 - \frac{1}{2}(2 + \lambda_8)\right]^2 + \frac{1}{2}(\lambda_8 - 2)^2 - 4 = 0. \end{aligned} \right.$$

Elle montre que $(\lambda_8 - 2)^2$ est inférieur ou égal à 8, c'est-à-dire que λ_8 est au plus égal à 5. Comme λ_8 est un quelconque des nombres λ_i, on voit qu'aucun des λ ne saurait dépasser 4. Il en résulte, d'après (d), que m est inférieur à 12.

Si $N = 7$, l'égalité (e), où l'on fait $\lambda_8 = 0$, montre que $(\lambda_7 - 1)^2$ est au plus égal à 3, c'est-à-dire qu'aucun des λ ne saurait dépasser 2; m est donc inférieur à 6.

Une discussion facile, où l'on tient compte des égalités (a), (d) et $p = 0$, permet d'énumérer tous les cas possibles et d'énoncer le théorème suivant :

Lorsque les nœuds d'une équation $y' = \frac{P}{Q}$ *(à points singuliers simples ou confondus) sont tous dicritiques et que leur nombre* N *est inférieur à* 9, *l'intégrale de cette équation ne saurait être algébrique que si* N *est égal à* 8, 7, 6, 4 *ou* 1. *Le genre de cette intégrale est toujours nul; son degré est au plus égal à* 11 *si* $N = 8$, *à* 5 *si* $N = 7$; *il est égal à* 3 *si* $N = 6$, *à* 2 *si* $N = 4$, *à* 1 *si* $N = 1$.

Parmi les N nœuds, N_4 sont des points quadruples (à tangentes simples) des courbes intégrales, N_3 sont des points triples, N_2 sont des points doubles, N_1 des points simples. Les nombres m, N_1, N_2, N_3, N_4 sont susceptibles de recevoir les valeurs suivantes :

		N nœuds.			
	Degré.	Points quadruples.	Points triples.	Points doubles.	Points simples.
$N = 8\ldots$	$m = 11$	$N_4 = 7$	$N_3 = 1$	$N_2 = 0$	$N_1 = 0$
	10	4	4	0	0
	9	2	5	1	0
	8	1	4	3	0
	8	0	7	0	1
	7	1	1	6	0
	7	0	4	3	1
	6	0	2	4	2
	5	0	1	3	4
	4	0	1	0	7
$N = 7\ldots$	5	0	0	6	1
	4	0	0	3	4
$N = 6\ldots$	3	0	0	1	5
$N = 4\ldots$	2	0	0	0	4
$N = 1\ldots$	1	0	0	0	1

Il convient de remarquer que dans ces exemples, où notre méthode suffit à reconnaître si l'intégrale générale est algébrique, *le genre de cette intégrale est nul.* On se rend compte qu'il doit en être ainsi de la manière suivante :

Les relations dont nous disposons se composent d'un système (α) de trois égalités [les égalités (a), (b) et une troisième égalité relative aux points d'inflexion] et d'une inégalité (c)

$$(c) \qquad (m-1)(m-2)-2d \geqq 0,$$

inégalité qui peut s'écrire encore

$$(d) \qquad (m-1)(m-2)-2d = 2p,$$

p désignant un nombre nul ou positif, mais indéterminé quand on ne se donne pas le genre.

Admettons que l'intégrale de (8) soit algébrique; à cette intégrale correspond un système d'entiers m, λ_i qui vérifient les relations (α) et l'inégalité (c). Quand on remplace l'équation *irréductible*

$$(9) \qquad \frac{M(y,x)}{N(y,x)} = \chi(y,x) = A$$

par la suivante

$$(9)' \qquad g(\chi) = g(A),$$

g étant rationnel en χ et de degré μ, à la courbe (9)' correspond un nouveau système d'entiers m', λ'_i, à savoir $\lambda'_i = \mu\lambda_i$ et $m' = \mu m$, qui vérifient encore évidemment les relations (α). Il reste à savoir si l'inégalité (c) subsiste, autrement dit, si le genre de la courbe (9)', calculé comme pour une courbe irréductible, est nul ou positif. Nous avons, pour la courbe (9),

$$(m-1)(m-2)-2d = 2p, \qquad (p \geqq 0).$$

La courbe (9)' est de degré $m\mu$, et le nombre de ses points doubles est, comme on le voit aisément, $\mu d + \frac{m^2\mu(\mu-1)}{2}$. Le genre p' de (9)' est donc donné par l'égalité

$$2p' = (\mu m - 1)(\mu m - 2) - 2\mu d - m^2\mu(\mu - 1)$$

ou encore

$$p' - 1 = \mu(p-1).$$

Ceci nous montre que, si p est plus grand que 1, p' *a fortiori* est plus grand que 1; si $p = 1$, p' est égal à 1 quel que soit μ; enfin, si $p = 0$, p' est négatif dès que μ est plus grand que 1.

D'après cela, si le genre de l'intégrale n'est pas nul, les relations (α) et l'inégalité (c) sont vérifiées pour des valeurs de μ, par suite, pour des valeurs des entiers m et λ_i aussi grandes qu'on veut. *Les relations dont nous disposons ne sauraient donc suffire à déterminer une limite du degré de l'intégrale supposée algébrique que dans le cas où le genre de cette intégrale serait nul.* Si donc les relations (α) et (c) en m et λ_i admettent un nombre fini de solutions positives, on est certain ou que l'intégrale n'est pas algébrique, ou que son genre est nul.

De plus, si l'on se donne le genre p de l'intégrale, mais que p soit égal à 1, les relations (α) et l'égalité (d)

$$(d) \qquad (m-1)(m-2) - 2d = 2$$

sont vérifiées, quand l'intégrale est algébrique, par des systèmes d'entiers m et λ_i aussi grands qu'on veut. *Les égalités* (α) *et* (d) *ne sauraient donc jamais déterminer une limite du degré de l'intégrale quand elle est algébrique et de genre* 1.

Il est clair d'après cela que pour déterminer en général une limite du degré de l'intégrale supposée algébrique, il est indispensable d'introduire des conditions exprimant que la relation (9) est indécomposable pour A quelconque. Mais je ne développerai pas ici ces considérations [1].

J'ajoute que les relations (α) et (d) permettent dans certains cas de *reconnaître si l'équation admet plus d'une intégrale particulière algébrique dont le genre est ou non donné.* Comme ces intégrales peuvent passer par un ou plusieurs cols, les sommes Σ qui figurent dans ces égalités doivent être étendues non seulement aux nœuds, mais aussi à un certain nombre de branches passant par les cols. On forme ainsi un

---

[1] *Voir* à ce sujet les travaux déjà cités de M. Poincaré sur l'intégration algébrique des équations du premier ordre et du premier degré. Voir également plusieurs Notes de M. Autonne sur la même matière (*Comptes rendus*, mars, novembre 1891, février 1892), et les Notes que j'ai publiées sur les intégrales algébriques ou à n valeurs des équations du premier ordre (*Comptes rendus,* mai 1891, janvier et février 1892).

nombre fini de systèmes (α), (d), qui limitent parfois le degré des intégrales.

Enfin, les deux dernières relations (α) et la relation (d) peuvent servir à *reconnaître s'il existe une intégrale particulière algébrique dont le genre est ou non donné.*

Il est clair d'ailleurs, que la recherche des intégrales particulières algébriques est un problème plus compliqué que la recherche des cas où l'intégrale générale de l'équateur est algébrique. Il existe toutefois une classe d'intégrales algébriques qu'on peut toujours déterminer sûrement : ce sont *les intégrales rationnelles.* C'est la détermination de ces intégrales que nous allons effectuer pour terminer ces applications.

7. Bien des questions se ramènent à la recherche des intégrales rationnelles des équations différentielles. Étant donnée une équation différentielle d'ordre quelconque, on peut trouver les polynômes qui vérifient cette équation en déterminant une limite supérieure de leur degré. Plus généralement, si l'on connaît le nombre des racines distinctes de l'équation $y_0 = R(x)$ pour une certaine valeur de y_0 [par exemple le nombre des pôles distincts de $R(x)$], on peut calculer les intégrales rationnelles $y = R(x)$ en déterminant une limite supérieure du degré des deux termes de $R(x)$. C'est ce qui se présente dans le cas des équations linéaires, dans le cas des équations du premier ordre telles que pour une certaine valeur y_0 de y toutes les valeurs de y' soient nulles quel que soit x (y_0 n'étant pas, quel que soit x, un point critique de y'). Mais ce sont là des circonstances exceptionnelles. La méthode que je vais indiquer ici permet de résoudre *sûrement* la question pour des équations de la forme

$$(8) \qquad y' = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)},$$

où P et Q sont deux polynômes en y, x.

Si (x_0, y_0) vérifient la relation

$$(11) \qquad Q(x_0, y_0) = 0,$$

x_0 est un point critique de l'intégrale y qui prend pour $x = x_0$ la valeur y_0; à moins toutefois que (x_0, y_0) ne satisfasse aussi à la relation $P = 0$.

D'après cela, la courbe

$$y = R(x) \tag{12}$$

ne peut rencontrer la courbe (11) qu'en des points qui lui soient communs avec la courbe $P = 0$. Pour éviter toute discussion relative aux valeurs infinies de y, effectuons sur x et y la transformation suivante

$$y = \frac{ay_1 + bx_1 + c}{a'y_1 + b'x_1 + c'}, \qquad x = \frac{\alpha x_1 + \beta}{\alpha' x_1 + \beta'},$$

$a, b, \ldots, \alpha, \ldots$ étant des constantes. La courbe (12) a pour équation

$$y_1 = \frac{A_n(x_1)}{B_n(x_1)}, \tag{12'}$$

A_n et B_n étant de degré n en x_1, et les courbes (12′) et

$$Q_1(y_1, x_1) = 0 \tag{11'}$$

n'ont pas de points communs dont l'y soit infini. Il serait d'ailleurs bien facile de traiter le problème sans se servir de cette transformation.

Dans ces conditions, les courbes (11′) et (12′) ne peuvent admettre comme points communs que des points communs aux courbes

$$P_1 = 0, \qquad Q_1 = 0,$$

situés à distance finie, et peut-être des points qui correspondent à $x_1 = \infty$. Examinons d'abord ces derniers : pour $x_1 = \infty$, l'ordonnée y_1 de (12′) tend vers une valeur finie a. Si (11′) et (12′) ont un point commun à l'infini dans la direction de x, il faut que (11′) admette une asymptote parallèle à Ox_1. Ce point est un point simple d'intersection à moins que cette asymptote ne coïncide avec la droite $y_1 = a$. Mais on connaît les valeurs limites de l'ordonnée y_1 de (11)′ pour $x_1 = \infty$; soit $y_1 = b$ une de ces valeurs. On sait, en formant l'équation en $\xi = \frac{1}{x_1}$, développer les intégrales holomorphes égales à b pour $\xi = 0$ autour du point $\xi = 0$, et, par suite, trouver l'ordre maximum de multiplicité δ de l'intersection au point $y_1 = b$, $x_1 = \infty$ des deux courbes (11') et (12').

La même discussion s'effectue plus facilement en chacun des points (x_0, y_0) communs aux courbes

$$P_1 = 0, \qquad Q_1 = 0.$$

On sait reconnaître si l'équation (8')

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{P_1(y_1, x_1)}{Q_1(y_1, x_1)}$$

admet des intégrales holomorphes prenant pour x_0 la valeur y_0, et déterminer, pour ces intégrales, le développement de $(y - y_0)$ suivant les puissances de $(x - x_0)$. On en déduit l'ordre maximum de multiplicité δ_0 du point (x_0, y_0) considéré comme point de rencontre de (11') et (12'). En faisant ce calcul pour tous les points (x_0, y_0), on obtient une limite supérieure $\mu = \delta + \Sigma\delta_0$ du nombre de points de rencontre (distincts ou confondus) des courbes (11') et (12'). Soit q le degré de $Q_1(y_1, x_1)$; on doit avoir

$$\mu \geqq q(n+1),$$

d'où l'on déduit une limite de n. Les intégrales $R(x)$ se calculent dès lors algébriquement. La méthode n'est en défaut que si l'équation (8) est une équation de Riccati, mais la question se traite alors directement.

Il est facile d'étendre la méthode aux équations hyperelliptiques en y', y :

$$y' = A(y, x) + B(y, x)\sqrt{R(y, x)},$$

en faisant jouer aux valeurs (y, x), qui annulent $R(y, x)$, le rôle des valeurs (y_1, x_1) qui rendent, dans l'équation (8'), y'_1 infinie. La méthode n'est en défaut que si toutes les fonctions $y(x)$ définies par $R = 0$ sont des intégrales singulières.

Le même procédé permet de calculer toutes les intégrales rationnelles des équations

$$y'^r = R(y, x), \tag{13}$$

à moins toutefois que l'intégrale générale n'ait que des points critiques fixes, auquel cas l'équation s'intègre algébriquement, ou se ramène soit à une équation de Riccati, soit à une quadrature

$$y' = \mathrm{J}(x)\sqrt{(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)}.$$

Cette équation est la seule équation de la forme (13) dont on ne puisse calculer algébriquement les intégrales rationnelles. Mais je ne veux pas insister sur ces extensions faciles.

J'arrêterai ici cette étude des équations du premier ordre et du premier degré. Dans un travail ultérieur, je montrerai comment les principes développés dans ce Mémoire permettent, moyennant quelques considérations nouvelles, de pousser plus loin la recherche des équations dont l'intégrale générale est algébrique ou ne prend dans le plan qu'un nombre limité de valeurs.

TABLE DES MATIÈRES.

(2)

17776 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.